

PFADSTRUKTUREN AUF MANNIG- FALTIGKEITEN MIT ANWENDUNGEN AUF DIE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Egon Köhler

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553811_0008

PFADSTRUKTUREN AUF MANNIG- FALTIGKEITEN MIT ANWENDUNGEN AUF DIE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Egon Köhler

1976



1. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Ehlers
2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 15. November 1976

INHALT

Einleitung	1
I. Grundbegriffe	
1. Kurven, Lifts	3
2. Pfade, Richtungen	7
II. Pfadstrukturen	
1. Pfadstrukturen und spezielle Richtungsfelder	17
2. Darstellung in lokalen Koordinaten	19
3. Integralkurven von speziellen Richtungsfeldern	27
Anhang	29
III. Geodätische Pfadstrukturen	
1. Geodäten und spezielle Richtungsfelder	33
2. Geodätische Sprays	38
3. Zusammenhänge im Bündel der linearen Basen, nichtlineare Übertragungen	41
4. Zusammenhänge im Bündel der projektiven Basen, Richtungsübertragungen	48
IV. Nichtgeodätische Pfadstrukturen	
1. Existenz, Beispiele	57
2. Eingeschränkte Pfadstrukturen	58
3. Eingeschränkte Sprays	64
V. Symmetrien	
1. Definition der Symmetrien von Pfadstrukturen	72
2. Punktale Drehungen und starke Isotropie	77
3. Infinitesimale Symmetrien und schwache Isotropie	80
IV. Pfadstrukturen und Gravitationstheorie	88
Zusammenfassung	99
Literatur	101
Lebenslauf	103

Herrn Prof. Jürgen Ehlers danke ich herzlich für die Anregung und unermüdliche Betreuung dieser Arbeit, den Herren Petr Hájiček, Alfred Schild, Bernd Schmidt und Martin Walker für viele anregende Diskussionen und Ratschläge. Fräulein R. Strasser danke ich für ihre Mühe bei der Reinschrift des Manuskripts.

EINLEITUNG

Bei einem axiomatischen Aufbau der allgemeinen Relativitätstheorie kann man von einer Mannigfaltigkeit M ausgehen, deren Punkte als mathematische Bilder physikalischer Ereignisse interpretiert werden. Diese Mannigfaltigkeit versieht man mit einer konformen und einer projektiven Struktur. Die konforme Struktur dient als mathematisches Bild der Kausalstruktur bzw. der Lichtausbreitung, während die projektive Struktur zur Darstellung der Trägheit, die nach Einstein mit der Schwere identisch ist, verwendet wird. Die Weltlinien freifallender Probekörper bezeichnen wir als Pfade. Die durch diese Linien gegebene projektive Struktur ist eine Pfadstruktur, dh. zu jedem Punkt p aus M und jeder zeitartigen Richtung (bezüglich der konformen Struktur) gibt es genau einen Pfad durch p in dieser Richtung.

Während die Kausalstruktur für sich betrachtet eingehend von Kronheimer, Penrose, Carter, Hawking und anderen [24] untersucht wurde, scheinen allgemeine Pfadstrukturen - dh. solche, die nicht von vornherein als Geodätensystem eines Zusammenhanges definiert sind - nicht betrachtet worden zu sein. Hier soll deshalb untersucht werden, auf welche Weisen man allgemeine Pfadstrukturen beschreiben kann und welche Kriterien es gibt, um die Üblicherweise zur Darstellung der Trägheit verwendeten Geodätensysteme unter den allgemeinen Pfadsystemen auszuzeichnen. Naturgemäß sind dabei solche Bedingungen erwünscht, die auch eine physikalische Deutung zulassen. Erst durch solche Kennzeichnungen wird das schwache Äquivalenzprinzip mathematisch tiefer verstanden.

Zur Beschreibung von Pfadstrukturen kann man sich spezieller "Richtungsbündel" bedienen, die eine elegante Definition gestatten. Darin lassen sich die geodätischen Pfadstrukturen durch einfache algebraische Relationen charakterisieren. Eine andere Definition stützt sich auf die Theorie der Sprays und erlaubt die Auszeichnung der geodätischen Strukturen mittels Differenzierbarkeitsbedingungen. Jedoch erscheinen diese beiden Charakterisierungen physikalisch schwer faßbar.

Es ist möglich, geodätische Pfadstrukturen unter den allgemeinen durch Symmetrieeigenschaften auszuzeichnen. Dies liefert die geometrisch anschaulichste Charakterisierung der Geodätenstruktur. Sie entspricht der Helmholtz-Lieschen Kennzeichnung der Riemannschen unter den metrischen Räumen durch punktale Isotropie [6]. Man kann sie physikalisch so interpretieren, daß durch die Gesamtheit der Pfade in einer (geeignet definierten) infinitesimalen Umgebung keine Richtung (keine Gravitationsfeldstärke) ausgezeichnet ist.

Die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Symbole entsprechen dem in der neueren Literatur (zB. [1,2,3,13]) üblichen Formalismus. Wir weisen insbesondere darauf hin, daß bei Indexschreibweise ein Komma $()_{,a}$ partielle Differentiation bedeutet, runde oder eckige Klammern Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung (zB. $T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba})$). Wie oft üblich, werden meist Koordinaten und Punkte der Mannigfaltigkeit identifiziert, also zB. $(x^a(p)) = p$. Die Differenzierbarkeit von Abbildungen bezeichnen wir mit C^r (r-mal stetig differenzierbar), C^∞ , oder C^ω (reell analytisch), wobei der Definitionsbereich im allgemeinen aus dem Zusammenhang klar ist.

I. GRUNDBEGRIFFE

I.1 Kurven, Lifts

1. Für unsere Untersuchungen legen wir eine differenzierbare zusammenhängende Hausdorff-Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 2$ und der Differenzierbarkeitsklasse C^k ($k \geq 3$) zugrunde. Da wir in erster Linie lokale Aussagen machen wollen, genügt es meist, sich jeweils auf eine Koordinatenumgebung $U \subset M$ zu beschränken. Insbesondere wird bei Rechenbeispielen im allgemeinen explizit $M = \mathbb{R}^n$ angenommen. Für die wenigen globalen Aussagen fordern wir noch, daß M parakompakt ist. Dies ist im Hinblick auf physikalische Anwendungen keine Einschränkung.

2. Den Tangentialraum von M in einem Punkt $p \in M$ bezeichnen wir mit M_p oder $T_p M$, seine Elemente (Vektoren) mit $X_p, Y_p, \dots$ oder $X, Y, \dots$, etc., den Nullvektor mit O_p . Wie üblich wird M_p mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert.

3. Ist $TM = \bigcup_{p \in M} M_p$ die Vereinigung aller dieser M_p , so sei π_T die Projektion

$$\pi_T : TM \rightarrow M : X_p \mapsto p.$$

$\pi_T : TM \rightarrow M$ ist dann ein Vektorbündel, das Tangentenbündel mit Standardfaser $\pi_T^{-1}(p) = M_p \cong \mathbb{R}^n$, und von der Klasse C^{k-1} .

4. Nun betrachten wir Kurven in M . Dieser Begriff wird recht unterschiedlich gebraucht, darum präzisieren wir:

Eine Kurve γ in M ist eine differenzierbare Abbildung der Klasse C^k eines offenen Intervalles $I \subset \mathbb{R}$ in die Mannigfaltigkeit M ,

$$\gamma : I \rightarrow M : t \mapsto \gamma(t) \quad .$$

Bezeichnet man den Tangentenvektor von γ im Punkt $\gamma(t)$ mit

$$\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \quad , \text{ dann soll für alle } t \in I \text{ gelten}$$

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0_{\gamma(t)} \quad .$$

Eine Kurve nach unserem Sprachgebrauch ist also ein C^k -differenzierbares, parametrisiertes Kurvenstück ohne stationäre Stellen.

5. Analog kann man Kurven γ^T in TM betrachten. Wenn eine Kurve γ in M gegeben ist, so gibt es ausgezeichnete Kurven in TM , nämlich solche, die "über" γ liegen, d.h. für die gilt

$$\pi_T \circ \gamma^T = \gamma \quad .$$

Unter diesen gibt es wiederum eine ausgezeichnete Kurve, den kanonischen Lift $l^T(\gamma)$, definiert durch

$$l^T(\gamma)(t) = \dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in I \quad .$$

Deshalb wird $l^T(\gamma)$ auch kurz mit

$$\dot{\gamma} : I \rightarrow TM$$

bezeichnet. Wir verwenden den Begriff Lift nur für den kanonischen Lift.

6. Jede Kurve γ^T in TM , die nirgends tangential zu den Fasern von TM ist, definiert mittels Projektion eine Kurve $\pi_T \circ \gamma^T$ in M , und jede Kurve in M ist so darstellbar. Gilt für eine Kurve γ^T die Identität

$$l^T (\pi_T \circ \gamma^T) = \gamma^T, \quad ,$$

so ist γ^T der Lift einer Kurve γ in M :

$$\gamma^T = \dot{\gamma} = (\pi_T \circ \gamma^T)^* .$$

Wir nennen solche Kurven auch speziell.

7. Wiederholt man die Konstruktion des Tangentenbündels nun über TM , so erhält man das zweite Tangentenbündel T^2M (oder T^2M). Analog zum ersten Bündel schreiben wir $(TM)_X$ für den Tangentialraum von TM im Punkt $X \in TM$,

$T^2M = \bigcup_{X \in TM} (TM)_X$, und $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}_X$, etc. für Vektoren aus T^2M . Die zugehörige Projektion sei

$$\Pi_T : T^2M \rightarrow TM : \mathbf{Z}_X \mapsto X .$$

8. Es gibt eine weitere natürliche Abbildung von T^2M nach TM , nämlich das Differential der Projektion π_{T*} :

$$\pi_{T*} : T^2M \rightarrow TM .$$

DEFINITION: Ein Vektor $\mathbf{Z} \in T^2M$ heißt speziell, wenn

$$\Pi_T \mathbf{Z} = \pi_{T*} \mathbf{Z} .$$

Die speziellen Vektoren bilden einen n -dimensionalen Teilraum von $(TM)_X$ (Siehe Koordinatendarstellung in 45).

9. Man zeigt leicht, daß spezielle Kurven in TM immer spezielle Tangentenvektoren haben. Ist nämlich $\dot{\gamma} : I \rightarrow TM$ der Lift der Kurve $\gamma : I \rightarrow M$, dann gilt für den Tangentenvektor $\ddot{\gamma}(s) \in T^2M$ im Punkt $\dot{\gamma}(s) \in TM$

$$\Pi_T(\ddot{\gamma}(s)) = \dot{\gamma}(s) = (\pi_{T \circ \dot{\gamma}})'(s) = \pi_{T*}(\ddot{\gamma}(s)) \quad .$$

Also ist $\ddot{\gamma}(s)$ speziell.

10. Jetzt betrachten wir ein spezielles C^1 -Vektorfeld $\mathbf{Z}$ über TM , also einen globalen Schnitt von T^2M ,

$$\mathbf{Z} : TM \rightarrow T^2M : X \rightarrow \mathbf{Z}_X$$

mit speziellen $\mathbf{Z}_X$. Zu $\mathbf{Z}$ existieren Integralkurven γ^T durch jeden Punkt $X \in TM$, wodurch Kurven $\gamma := \pi_T \circ \gamma^T$ in M definiert werden. Wir behaupten die Umkehrung der Aussage in 9.

LEMMA: Die durch $X \in TM$ gehende Integralkurve γ^T von $\mathbf{Z}$ mit $\gamma^T(s) = X$ ist speziell.

$$\mathbf{Z}_X = (\pi_T \circ \gamma^T)''(s) \quad .$$

BEWEIS: Ist γ^T eine Integralkurve von $\mathbf{Z}$, so gilt für $s \in I \subset \mathbb{R}$

$$(\pi_T \circ \gamma^T)'(s) = \pi_{T*} \mathbf{Z}_{\gamma^T(s)} = \Pi_T \mathbf{Z}_{\gamma^T(s)} = \dot{\gamma}^T(s) \quad ,$$

also
$$(\pi_T \circ \gamma^T)'' = \dot{\gamma}^T \quad .$$

Danach ist γ^T der Lift von $\gamma := \pi_T \circ \gamma^T$, somit

$$\dot{\gamma}^T = \dot{\gamma}$$

$$\dot{\gamma}^T(s) = \mathbf{Z}_{\gamma^T(s)} = \ddot{\gamma}(s) \quad .$$

11. ANMERKUNG: Ein spezielles Vektorfeld über TM heißt auch Differentialgleichung zweiter Ordnung über M [1]; siehe 46.

I.2 Pfade, Richtungen

12. Bei den physikalischen Anwendungen, die wir im Auge haben, wird die Parameterisierung von Kurven nicht von vorneherein festliegen oder durch plausible Argumente ausgezeichnet sein. Wir wollen deshalb den allgemeineren Begriff des Pfades einführen, gleichsam als "Kurve ohne Parameter". Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

13. Wir nennen zwei Kurven $\gamma : I \rightarrow M$ und $\mu : J \rightarrow M$ äquivalent, $\gamma \sim \mu$, wenn es eine bijektive C^k -Abbildung $f : I \rightarrow J$ gibt, sodaß

$$\gamma = \mu \circ f.$$

Man sagt auch, γ geht aus μ durch Umparameterisierung hervor.

14. DEFINITION: Eine Äquivalenzklasse von Kurven in M bezüglich der in 13 erklärten Äquivalenzrelation heißt ein Pfad Γ in M . Für den durch γ definierten Pfad schreiben wir $\Gamma = \gamma$, $\gamma \in \Gamma$ bedeute γ ist Repräsentant von Γ .

Wir sagen, ein Pfad Γ geht durch einen Punkt $p \in M$ oder Γ enthält p , wenn es $\gamma \in \Gamma$ gibt und einen Parameterwert s , sodaß $\gamma(s) = p$.

15. Γ' heißt Fortsetzung von Γ , wenn für je einen (und damit für alle) Repräsentanten $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma'$ gilt: $\text{Bild } \gamma \subsetneq \text{Bild } \gamma'$. Wenn es keine Fortsetzung von Γ gibt, heißt Γ maximal.

16. Die Tangentenvektoren von zwei verschiedenen Repräsentanten γ, μ eines Pfades γ unterscheiden sich nur durch einen von Null verschiedenen Faktor. Ist nämlich $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$, $\mu: s \rightarrow \mu(s)$ und $\gamma = \mu \circ f$ mit $f: t \rightarrow s(t)$, dann gilt für die Tangentenvektoren im Punkt $\gamma(t) = \mu(s(t))$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\mu}(s(t)) \cdot f'(t),$$

$$f'(t) = \frac{ds}{dt}(t) \neq 0,$$

da f bijektiv.

17. Vektoren, die sich nur um einen Faktor $\lambda \neq 0$ unterscheiden, nennen wir wiederum äquivalent.

DEFINITION: $X, Y \in M_p$ sind äquivalent, $X \sim Y$, wenn es eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$ gibt mit $X = \lambda Y$. Die Äquivalenzklasse $\underline{X}$ von X heißt Richtung (von X). Die Abbildung $X \rightarrow \underline{X}$ bezeichnen wir mit R , $R(X) = \underline{X}$.

Nach 16 ist sofort klar, daß jeder Pfad γ in jedem seiner Punkte eine eindeutig bestimmte Richtung hat.

18. Im Unterschied zum üblichen Sprachgebrauch definieren die Vektoren X und $-X$ dieselbe Richtung. Geometrisch entspricht einer Richtung eine Gerade, nicht ein Strahl. Die Gesamtheit aller Richtungen zu einem n -dimensionalen Vektorraum kann also mit dem zugehörigen $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Raum identifiziert werden:

$$R(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{P}^{n-1}.$$

19. Bildet man zu jedem $X \in M_p \setminus \{0_p\}$ die Richtung $\underline{X}$, so erhält man eine Menge

$$D_p M = \{ \underline{X} / X \in M_p, X \neq 0_p \} \cong \mathbb{P}^{n-1}.$$

Von der Vereinigung $DM = \bigcup_{p \in M} D_p M$ existiert eine natürliche Projektion π_D auf M ,

$$\pi_D : DM \rightarrow M : \underline{X}_p \mapsto p.$$

Dadurch ist ein Faserbündel (aber kein Vektorbündel), das Richtungs-bündel von M definiert.

$T_p M$	$D_p M$
Vektorraum	kein Vektorraum
nicht kompakt	kompakt

Ist A die Äquivalenzrelation, die Antipoden auf der Sphäre $\mathbb{S}^r$ identifiziert ($p A q \iff p = \pm q \in \mathbb{S}^r$), dann ist auch

$$D_p M \cong \mathbb{S}^{n-1} / A.$$

20. Jeder Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ kann ein Lift $l^D(\gamma)$ in DM zugeordnet werden vermöge

$$l^D(\gamma) : I \rightarrow DM : t \mapsto \underline{\dot{\gamma}(t)} .$$

Deshalb schreiben wir auch $\dot{\gamma}$ anstatt $l^D(\gamma)$. Dieser Lift ist wieder eine Kurve im Sinne von 4 (siehe 49).

21. Wir übernehmen die Bezeichnung von Kurven in TM und nennen eine Kurve $\gamma^D : I \rightarrow DM$ speziell, wenn γ^D ein Lift einer Kurve in M ist, wenn also gilt

$$\gamma^D = l^D(\gamma_D \cup \gamma^D) = \underline{(\gamma_D \cup \gamma^D)} .$$

22. LEMMA: Zwei äquivalente Kurven $\gamma \sim \mu$ in M haben äquivalente Lifts in DM , $\dot{\gamma} \sim \dot{\mu}$.

BEWEIS: Mit den Bezeichnungen von 16 gilt punktweise für die Lifts

$$\underline{\dot{\gamma}(t)} = \underline{\dot{\mu}(s(t)) \cdot f'(t)} = \underline{\dot{\mu}(s(t))} = \underline{(\dot{\mu} \circ f)(t)} .$$

Also geht $\dot{\gamma}$ aus $\dot{\mu}$ durch Umparameterisierung hervor.

23. Eine Äquivalenzklasse von Kurven γ^D in DM heißt wieder ein Pfad γ^D in DM . Nach 22 erhält man aus den Kurven γ eines Pfades Γ in M durch Liften die Kurven $\dot{\gamma}$ eines Pfades $\dot{\Gamma} := \underline{\dot{\gamma}}$ in DM . Nun können wir definieren, was der Lift eines Pfades nach DM ist.

DEFINITION: Ein Pfad $\tilde{l}(\Gamma)$ in DM heißt Lift des Pfades Γ in M oder spezieller Pfad, wenn für einen (und damit für alle) Repräsentanten $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\tilde{l}(\Gamma) = \dot{\Gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \quad .$$

24. Fassen wir kurz zusammen: Wir haben drei Lift-Operationen definiert, l^T , l^D und $\tilde{l}$ mit folgenden Wirkungen

l^T : Kurve in $M \rightarrow$ spezielle Kurve in TM

l^D : Kurve in $M \rightarrow$ spezielle Kurve in DM

$\tilde{l}$: Pfad in $M \rightarrow$ spezieller Pfad in DM

Es sind bijektive Abbildungen zwischen der Menge der Kurven (Pfade) in M und der Menge der speziellen Kurven (Pfade) in TM bzw. DM .

25. Es ist klar, daß über der C^{k-1} -Mannigfaltigkeit DM die Konstruktion von Tangential- und Richtungsrumen und -bündeln wiederholt werden kann. Zum Punkt $\xi \in DM$ erhält man so die Räume $(DM)_\xi$ und $D_\xi DM$. Die Vereinigung über alle $\xi \in DM$ liefert die Bündel TDM und $DDM = D^2M$ mit den Projektionen $\hat{\Pi}$ und Π_D .

26. Ebenso kann die Operation des Liftens iteriert werden. Hierfür verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie oben, also z.B. l^T auch für Lifts von TM nach T^2M und von DM nach T^2DM . Für eine Kurve γ in M ist also

$$(l^T \circ l^T)'(\gamma) = l^T'(\dot{\gamma}) =: \ddot{\gamma}$$

der iterierte Lift nach T^2M .

27. Für iterierte Lifts von Pfaden Γ in M verwenden wir folgende Bezeichnung:

$$\ddot{\Gamma} := \underline{l}(\dot{\Gamma}) = \underline{l} \circ \underline{l}(\Gamma) \quad .$$

Dies ist ein Pfad in D^2M . Ist γ ein Repräsentant von Γ , dann ist

$$\ddot{\Gamma} = \underline{l}(\dot{\Gamma}) = \underline{\underline{(\dot{\Gamma})}} \quad .$$

28. DEFINITION: Die Richtung eines speziellen Pfades $\dot{\Gamma}$ in einem Punkt $\xi \in DM$ nennen wir die Biegung von Γ in $\pi_D \xi \in M$. Ist $\Gamma = \gamma$, dann ist die Biegung längs Γ gegeben durch $(\dot{\gamma})'$.

29. Bei Kurven, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen, spricht man von Berührung m -ter Ordnung, wenn die Ableitungen nach dem Kurvenparameter dort bis zur m -ten Ordnung (incl.) übereinstimmen. Mit Hilfe der Richtungsbündel läßt sich ein analoger Begriff für Pfade einführen. Wir sagen, zwei Pfade Γ und Λ in M haben einen Kontakt 0 -ter Ordnung, wenn sie durch einen gemeinsamen Punkt $p \in M$ gehen. Von einem Kontakt

1. Ordnung sprechen wir, wenn in p zusätzlich die Richtungen von Γ und Λ übereinstimmen. Das bedeutet aber auch, daß die Lifts $\hat{\Gamma}$ und $\hat{\Lambda}$ in DM einen Kontakt 0. Ordnung haben. Dies verallgemeinern wir zu folgender

30. DEFINITION: Zwei Pfade Γ, Λ in M haben einen Kontakt m-ter Ordnung, wenn ihre iterierten Lifts $\mathcal{L}^m(\Gamma)$, $\mathcal{L}^m(\Lambda)$ ins m -te Richtungsbündel $D \dots DM = D^m M$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Ein Kontakt 2. Ordnung ist nach 23 damit äquivalent, daß Γ und Λ in einem Punkt $p \in M$ dieselbe Richtung und Biegung haben.

31. In 8, 10 wurden spezielle Vektorfelder über TM definiert. Auf ähnliche Art lassen sich spezielle Richtungsfelder über DM einführen. Man macht auch hier Gebrauch von zwei natürlichen Abbildungen von $D^2 M$ nach DM . Die erste ist die Bündelprojektion $\Pi_D : D^2 M \rightarrow DM : \Xi_\xi \mapsto \xi$.

32. Eine zweite Abbildung — π — kann man folgendermaßen konstruieren: Man betrachtet zur Projektion $\pi_D : DM \rightarrow M$ das Differential

$$\pi_{D*} : TDM \rightarrow TM : \xi \mapsto \pi_{D*}(\xi).$$

Zum Bildvektor $\pi_{D*}(\xi)$ bilden wir die Richtung $\underline{\pi_{D*}(\xi)} \in DM$. Wenn wir von einem Vektor $\lambda \cdot \xi \in TDM$ ($\lambda \neq 0$) ausgehen, so ist $\pi_{D*}(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot \pi_{D*}(\xi)$, folglich $\underline{\pi_{D*}(\lambda \cdot \xi)} = \underline{\pi_{D*}(\xi)}$.

Repräsentanten derselben Richtung $\Xi = \underline{\dot{\gamma}} \in D^2M$ werden also mittels $R \circ \pi_{D*}$ auf dieselbe Richtung $\pi_{D*}(\underline{\dot{\gamma}}) \in DM$ abgebildet. Somit ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\pi : D^2M \rightarrow DM : \pi(\Xi) = \pi(\underline{\dot{\gamma}}) \mapsto \pi_{D*}(\underline{\dot{\gamma}}) .$$

Formal können wir schreiben $\pi = R \circ \pi_{D*} \circ R^{-1}$.

33. DEFINITION: Eine Richtung $\Xi \in D^2M$ heißt speziell, wenn

$$\Pi_D(\Xi) = \pi(\Xi) .$$

ANMERKUNG: Man beachte die Analogie zu 8. Dort war für spezielle Vektoren $\Pi_T = \pi_{T*}$, hier ist Π_D "ähnlich" π_{D*} , nämlich $\Pi_D = R \circ \pi_{D*} \circ R^{-1}$.

34. Neben dieser formalen Ähnlichkeit ergibt sich der Sinn der Definition aus folgendem

LEMMA: Die Richtung eines speziellen Pfades in DM ist in jedem seiner Punkte speziell.

BEWEIS: Sei $\dot{\Gamma}$ ein spezieller Pfad, also der Lift $\lambda(\Gamma)$ eines Pfades Γ in M . Wenn γ ein Repräsentant von Γ ist, so ist $\dot{\gamma}$ ein Repräsentant von $\dot{\Gamma}$. Sei nun $\xi = \underline{\dot{\gamma}(s_0)} \in DM$ ein Punkt von $\dot{\Gamma}$. $\dot{\Gamma}$ hat in ξ die Richtung $\Xi = \underline{(\dot{\gamma})'(s_0)}$. Also ist

$$\Pi_D(\underline{(\dot{\gamma})'(s_0)}) = \dot{\gamma}(s_0) = \xi .$$

Wir berechnen $\pi(\Xi)$.

$$\begin{aligned}\pi\left(\underbrace{(\dot{\gamma})^*(s_0)}\right) &= \pi_{D*}\left(\underbrace{(\dot{\gamma})^*(s_0)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\pi_D(\dot{\gamma})\right)\Big|_{s_0} = \\ &= \frac{d}{ds}(\gamma(s))\Big|_{s_0} = \underbrace{\dot{\gamma}(s_0)} = \xi \quad .\end{aligned}$$

Somit ist Ξ speziell.

35. Sei Ξ ein spezielles Richtungsfeld über DM , also ein globaler Schnitt

$$\Xi : DM \rightarrow D^2M : \xi \mapsto \Xi_\xi$$

mit speziellem Ξ_ξ . (Für parakompaktes M existiert immer ein solcher Schnitt, siehe dazu 70,71)

LEMMA: Ist Ξ mindestens von der Klasse C^1 , so existieren eindeutige, spezielle, maximale Integralpfade in DM , d.h. es gibt spezielle Pfade, deren Richtung in jedem ihrer Punkte $\xi \in DM$ gerade durch Ξ_ξ gegeben ist, und durch jedes ξ geht genau ein solcher maximaler Pfad.

36. BEWEIS: DM ist parakompakt und C^{k-1} , da M parakompakt und C^k . Dann gibt es auf DM eine globale Riemannsche C^{k-2} -Metrik g [2,3]. Sie erlaubt uns, aus den Vertretern ξ von Ξ in jedem Punkt $\xi \in DM$ zwei auszuwählen, nämlich $\pm \xi$, mit $g(\pm \xi, \pm \xi) = 1$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle: Falls es möglich ist, aus den Vektoren $\pm \xi$, für alle ξ einen auszuwählen, sodaß das so erhaltene Vektorfeld

ξ_1 C^1 ist, (zB. wenn DM einfach zusammenhängend ist,) dann wissen wir, daß es in DM maximale Integralkurven von ξ_1 gibt, die uns dann die maximalen Integralpfade definieren. Anderenfalls gehen wir folgendermaßen vor (siehe dazu [4,5]):

Wir führen eine Lorentzmetrik ein, sodaß die Richtungen Ξ zeitartig sind. Wenn der erste Fall nicht zutrifft, ist DM nicht zeitorientierbar. Es gibt aber eine zweifache Überlagerungsmannigfaltigkeit $\tilde{U}(DM)$ von DM , die zeitorientierbar ist.

Zum induzierten Richtungsfeld $\Xi_{\tilde{U}}$ auf $\tilde{U}$ gibt es dann ein

C^1 -Vektorfeld $\xi_{\tilde{U}}$ wie oben. Die maximalen Integralkurven von $\xi_{\tilde{U}}$ in $\tilde{U}$ projizieren in natürlicher Weise auf Kurven in

DM . Die Existenz von Kurven, die sich selbst berühren, ist wegen der lokalen Darstellbarkeit durch Sprays (60) ausgeschlossen. Hierdurch erhalten wir wiederum maximale Integralpfade in DM . Es ist klar, daß die so erhaltenen Pfade speziell sind (vgl. Argumente in 10, 34).

II. PFADSTRUKTUREN

II.1 Pfadstrukturen und spezielle Richtungsfelder

37. Unter der Vielfalt der möglichen Pfade auf einer C^k -Mannigfaltigkeit M kann man bestimmte Teilmengen auszeichnen, mit denen wir uns näher beschäftigen werden.

DEFINITION: Eine Pfadstruktur $\mathcal{P}$ auf M ist eine Menge von Pfaden auf M , sodaß zu jedem Punkt $p \in M$ und jeder Richtung $\xi_p \in D_p M$ genau ein Pfad $\Gamma \in \mathcal{P}$ existiert, der p enthält und in p die Richtung ξ_p hat.

38. Zwischen Pfadstrukturen und speziellen Richtungsfeldern besteht ein enger Zusammenhang.

SATZ: Eine Pfadstruktur $\mathcal{P}$ auf M definiert ein spezielles Richtungsfeld Ξ über DM ,

$$\Xi : DM \rightarrow D^2 M : \xi \mapsto \Xi_\xi .$$

Für jeden Pfad $\Gamma \in \mathcal{P}$ und jeden Punkt ξ auf $\dot{\Gamma}$ gilt

$$\ddot{\Gamma}_\xi = \Xi_\xi .$$

Die Pfade von $\mathcal{P}$ sind also die Integralpfade von Ξ .

39. BEWEIS: Betrachte einen Pfad $\Gamma \in \mathcal{P}$ und seinen Lift $\dot{\Gamma}$ in DM . In jedem Punkt ξ von $\dot{\Gamma}$ hat $\dot{\Gamma}$ eine spezielle Richtung $\ddot{\Gamma}_\xi \in D^2 M$. Wir definieren längs $\dot{\Gamma} : \Xi_\xi := \ddot{\Gamma}_\xi$. Sei $\Lambda \in \mathcal{P}$ ein von Γ ver-

schiedener Pfad, so haben $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\Lambda}$ keinen gemeinsamen Punkt in DM. Dies würde nämlich bedeuten, daß $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\Lambda}$ einen Kontakt 0-ter Ordnung in DM, also Γ und Λ einen Kontakt 1. Ordnung in M hätten - entgegen der Definition von $\mathcal{P}$. Also kann man längs $\tilde{\Lambda}$ definieren $\Xi_{\xi} := \ddot{\Lambda}_{\xi}$ für $\xi \in \tilde{\Lambda}$. Da zu jeder Richtung $\xi \in DM$ ein Pfad $\Gamma \in \mathcal{P}$ mit dieser Richtung existiert, durchlaufen die Pfade $\tilde{\Gamma}$ ganz DM. Die Zuordnung

$$\Xi : \xi \rightarrow \Xi_{\xi}$$

ist also auf ganz DM wohldefiniert, somit ein Richtungsfeld über DM. Nach 34 ist es auch speziell.

40. Aufgrund des Satzes 38 hat man die Möglichkeit, den Begriff der Differenzierbarkeitsklasse für Pfadstrukturen einzuführen.

DEFINITION: Eine Pfadstruktur $\mathcal{P}$ heißt von der Klasse C^s , wenn das zugehörige Richtungsfeld $\Xi : DM \rightarrow D^2M$ von der Klasse C^s ist. Wir wollen immer $s \geq 1$ fordern.

41. Zu einem speziellen C^1 -Richtungsfeld über DM gibt es nach 35 immer spezielle maximale Integralpfade $\tilde{\Gamma}$ in DM, so daß durch jeden Punkt von DM genau ein solcher maximaler Pfad geht. Damit wird durch die Pfade $\Gamma = \pi_D(\tilde{\Gamma})$ eine Pfadstruktur auf M definiert.

SATZ: Ein spezielles Richtungsfeld über DM von der Klasse C^s , $s \geq 1$, definiert eine C^s -Pfadstruktur auf M.

II.2 Darstellung in lokalen Koordinaten

42. Die Beschreibung spezieller Vektor- und Richtungsfelder in lokalen Koordinaten gibt uns die Möglichkeit, explizite Beispiele für Pfadstrukturen zu finden und ist auch für viele Differenzierbarkeitsaussagen unumgänglich. Wir beginnen mit speziellen Vektorfeldern über TM .

43. Sei (x^a) ein lokales Koordinatensystem von M . Dann wählen wir in TM Koordinaten (x^a, y^b) , sodaß $X \in TM$ gegeben ist durch $X = y^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. In diesen Koordinaten gilt für die Projektion

$$\pi_T : TM \rightarrow M : (x^a, y^b) \mapsto (x^a) .$$

Analog benutzen wir für $Z \in T^2M$ die Koordinaten (x^a, y^b, u^c, w^d) , sodaß $Z = u^a \frac{\partial}{\partial x^a} + w^b \frac{\partial}{\partial y^b}$. Die Bündelprojektion ist also

$$\Pi_T : T^2M \rightarrow TM : (x^a, y^b, u^c, w^d) \mapsto (x^a, y^b) .$$

44. Das Differential π_{T*} wird bezüglich dieser Koordinaten beschrieben durch die $(n \times 2n)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \vdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} ,$$

also $\pi_{T*} : T^2M \rightarrow TM : (x^a, y^b, u^c, w^d) \mapsto (x^a, y^b)$.

Im allgemeinen ist also $\pi_{T*}Z \neq \Pi_T Z$.

45. Für spezielle Vektoren $\mathbf{Z} \in T^2M$ wird nach 8 gefordert

$$\pi_{T^*}\mathbf{Z} = \Pi_T\mathbf{Z} \quad ,$$

dh.
$$(x^a, u^b) = (x^a, y^b) \quad .$$

Ein spezieller Vektor hat also in unseren Koordinaten immer die Gestalt (x^a, y^b, y^c, w^d) . Die speziellen Vektoren aus T^2M bilden ein Teilbündel $T^{sp}TM \subset TTM$ der Dimension $3n$ über TM mit Koordinaten (x^a, y^b, w^c) . Dieses Bündel ist der angemessene Rahmen für die Geometrie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung über M .

46. Eine spezielle Kurve $\dot{\gamma}$ in TM hat die Koordinatendarstellung $(x^a(s), \dot{x}^b(s))$ und somit den (speziellen) Tangentenvektor $(x^a(s), \dot{x}^b(s), \dot{x}^c(s), \ddot{x}^d(s))$. Zu einem speziellen Vektorfeld

$$\mathbf{Z}_X = \left(y^a, \frac{\partial}{\partial x^a} + w^b(x^e, y^f) \frac{\partial}{\partial y^b} \right)_{(x^e, y^f)}$$

erhält man die Integralkurven als Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{x}^a &= y^a \\ \dot{y}^b &= w^b \quad , \end{aligned}$$

also von

$$\ddot{x}^a = w^a(x^b, \dot{x}^c) \quad .$$

47. BEISPIEL:

Jedes zeitunabhängige Kraftgesetz der Mechanik kann als Differentialgleichung von diesem Typ als spezielles Vektorfeld auf TM beschrieben werden (M Konfigurationsraum). Der Parameter der Integralkurven ist die Zeit. Wenn man jedoch die absolute Zeit

nicht als Grundbegriff einführen, sondern aus "tieferen" Gesetzen der Dynamik konstruieren will, kann man nicht mit Kraftgesetzen anfangen. Eine andere Möglichkeit ist, von Pfadstrukturen auszugehen.

48. Will man spezielle Richtungsfelder beschreiben, so hat man keine natürlichen Koordinatensysteme in DM und D^2M zur Verfügung. Unter den vielen Möglichkeiten erschien die Verwendung inhomogener Koordinaten, die auf den obigen Koordinatensystemen in TM und T^2M basieren, als die zweckmäßigste. Sei $\xi_p \in DM$, mit $p = (x^a)$, so definieren wir Koordinaten (x^a, ξ^β) , $\beta=1, \dots, n-1$, von ξ_p wie folgt: Wähle einen Repräsentanten $X_p \in TM$ von ξ_p , $\xi_p = \underline{X_p}$, mit Koordinaten (x^a, y^b) . Da $X_p \neq 0_p$, gibt es ein $b \in \{1, \dots, n\}$ mit $y^b \neq 0$, z.B. $b = n$. Wir definieren $\xi^\beta = \xi_n^\beta := \frac{y^\beta}{y^n}$ ($\beta = 1, \dots, n-1$). Es ist klar, daß mit $y^n \neq 0$ nicht alle Richtungen von $D_p M$ überdeckt werden können, vielmehr sind n Karten (x^a, ξ_b^β) , $b = 1, \dots, n$ nötig; jeweils mit $y^b \neq 0$ und $\xi_b^\beta = y^\beta / y^b$, $\beta = 1, \dots, b-1, b+1, \dots, n$. Soweit wir uns bei Rechnung auf eine Karte beschränken können, verwenden wir immer $\xi^\beta = \xi_n^\beta$.

49. Um die Koordinaten einer speziellen Richtung in D^2M zu berechnen, betrachten wir einen speziellen Pfad $\dot{\Gamma}$ in DM . Sei γ ein Repräsentant von Γ in M , somit $\dot{\gamma}$ ein Repräsentant von $\dot{\Gamma}$. Hat ein Punkt p auf γ die Koordinaten $(x^a(s))$, dann ist der darüberliegende Punkt des Lifts $\dot{\gamma}$ gegeben durch $(x^a(s), \dot{x}^b(s))$ und der zugehörige Punkt von $\dot{\gamma}$ durch $(x^a(s), \dot{x}^\beta(s) / \dot{x}^n(s))$ (evtl. nach Umnumerierung). Der Tangentenvektor an $\dot{\gamma}$ in $\xi = \dot{\gamma}(s)$ ist also

$$\xi_{\xi} = (\dot{\underline{Y}})'(s) = \dot{x}^a(s) \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(\frac{\dot{x}^\beta}{\dot{x}^n} \right)'(s) \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} =$$

$$= \dot{x}^a(s) \frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\ddot{x}^\beta(s) \dot{x}^n(s) - \ddot{x}^n(s) \dot{x}^\beta(s)}{(\dot{x}^n(s))^2} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} = \dot{x}^a(s) \frac{\partial}{\partial x^a} + \dot{\xi}^\beta(s) \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}$$

50. Zur Festlegung von Koordinaten für die Richtung $\Xi_{\xi} = \xi_{\xi}$ kann man wieder $(\dot{x}^a, \dot{\xi}^\beta)$ mit einer von Null verschiedenen Komponente normieren und erhält dadurch $2n-2$ Koordinaten K^A für jeweils eine der $2n-1$ möglichen Koordinatenumgebungen. Für die spezielle Richtung Ξ_{ξ} ist aber immer

$$\xi \ni X = \dot{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \neq 0,$$

man braucht somit nur die n Koordinatenumgebungen mit

$$K_b^A = \frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^b}, \dots, \frac{\dot{x}^{b-1}}{\dot{x}^b}, \frac{\dot{x}^{b+1}}{\dot{x}^b}, \dots, \frac{\dot{x}^n}{\dot{x}^b}, \frac{\dot{\xi}^1}{\dot{x}^b}, \dots, \frac{\dot{\xi}^{b-1}}{\dot{x}^b}, \frac{\dot{\xi}^{b+1}}{\dot{x}^b}, \dots, \frac{\dot{\xi}^n}{\dot{x}^b}$$

mit $b = 1, \dots, n$. Für $\xi = (\xi_n^\alpha) = (\xi^\alpha)$ (dh. $\dot{x}^n \neq 0$) verwenden wir natürlich auch hier die Karte $(K_n^A) = (K^A)$ und schreiben

$$\Xi_{\xi} = (x^a, \xi_n^\beta, K_n^C) = (x^a, \xi_n^\beta, \frac{\dot{x}^\gamma}{\dot{x}^n}, \frac{\dot{\xi}^\delta}{\dot{x}^n}) =: (x^a, \xi_n^\beta, \xi_n^\gamma, v_n^\delta).$$

In der n -ten Karte lassen wir normalerweise den unteren Index n bei ξ_n^α und v_n^β weg.

51. In den so ausgezeichneten Koordinaten ist eine Richtung $(x^a, \xi^\beta, \mu^\gamma, v^\delta)$ also dadurch als speziell charakterisiert, daß

$$\xi^\beta = \mu^\beta.$$

Die speziellen Richtungen aus DDM bilden ein Teilbündel

D^{SDM} der Dimension $3n-2$ mit Koordinaten $(x^a, \xi^\beta, v^\gamma)$.

Für die Geometrie der Pfadstrukturen ist dieses Bündel der angemessene Rahmen (vgl. 45).

52. Ein spezielles Richtungsfeld über DM kann bereits durch Vorgabe von $\mathbf{v}_n^\alpha = \mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}^\alpha(x^a, \xi^\beta)$, also nur in einer Karte bestimmt werden. Sei nämlich für $l \neq n$ die analoge Beschreibung von Ξ_ξ in der l -ten Karte ($\dot{x}^l \neq 0$) von $D^{\text{sp}}_{\text{DM}}$

$$\Xi_\xi = (x^a, \xi_1^{\lambda_1}, v_1^{\lambda_2}) \quad (\lambda_i \neq 1)$$

$$\text{mit } \xi_1^\lambda = \frac{\dot{x}^\lambda}{\dot{x}^1}, \quad v_1^\lambda = \frac{1}{\dot{x}^1} \left(\frac{\dot{x}^\lambda}{\dot{x}^1} \right)^* = \frac{1}{\dot{x}^1} \xi_1^\lambda.$$

Im Überlappungsbereich, also für $\dot{x}^l \neq 0$ und $\dot{x}^n \neq 0$ entsprechend $\xi_1^1 \neq 0$, $\xi_1^n \neq 0$, ergibt sich folgende Umrechnung:

$$\begin{aligned} v_1^\lambda(x^a, \xi_1^{\lambda_1}) &= \frac{1}{\dot{x}^1} \left(\frac{\dot{x}^\lambda}{\dot{x}^1} \right)^* = \frac{1}{\dot{x}^n} \cdot \frac{\dot{x}^n}{\dot{x}^1} \left(\frac{\dot{x}^\lambda / \dot{x}^n}{\dot{x}^1 / \dot{x}^n} \right)^* = \\ &= \frac{1}{\dot{x}^n} \left(\frac{\dot{x}^n}{\dot{x}^1} \right)^3 \left(\left(\frac{\dot{x}^\lambda}{\dot{x}^n} \right)^* \frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^n} - \left(\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^n} \right)^* \frac{\dot{x}^\lambda}{\dot{x}^n} \right) = \\ &= (\xi_1^n)^2 (v_n^\lambda(x^a, \xi_n^v) - \xi_1^\lambda v_n^1(x^a, \xi_n^v)) = \\ (*) \quad &= (\xi_1^n)^2 (v_n^\lambda(x^a, \xi_1^v / \xi_1^n) - \xi_1^\lambda v_n^1(x^a, \xi_1^v / \xi_1^n)) \quad \text{für } \lambda \neq n \end{aligned}$$

und

$$(\lambda) \quad v_1^n(x^a, \xi_1^\lambda) = -(\xi_1^n)^3 v_n^1(x^a, \xi_1^v / \xi_1^n).$$

Beachte: $\lambda, \lambda_i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n$

$v, v_i = 1, \dots, n-1$

$\xi_1^1 := 1$.

53. Die Funktionen $v_b^\beta(x^a, \xi_b^{\beta'})$ sind in den jeweiligen Karten ($b = 1, \dots, n$) für alle x^a aus der Koordinatenumgebung (von M) und alle $\xi_b^\beta \in \mathbb{R}$ definiert und C^k , wenn $\mathcal{E}_\xi$ ein C^k -Feld ist. Die Umrechnungsformeln $(*)$, $(\tilde{x})$ für v_1^λ gelten nur für $\xi_1^n \neq 0$. v_1^λ ist aber auch für $\xi_1^n = 0$ glatt, also ist die rechte Seite eindeutig C^k -fortsetzbar auf den ganzen $\mathbb{R}^{2n-1}$.

54. SATZ : Ein spezielles Richtungsfeld wird in einer Karte von M mit Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$ bestimmt durch $n-1$ Funktionen $v_n^v(x^a, \xi_n^{v'})$, die in $X \times \mathbb{R}^{n-1}$ definiert und C^k sind und überdies folgende Eigenschaft haben:
Für jedes $1 \in \{1, \dots, n-1\}$ sind die durch $(*)$ bzw. $(\tilde{x})$ für $\xi_1^n \neq 0$ definierten $n-1$ Funktionen v_1^λ auf den ganzen Raum $X \times \mathbb{R}^{n-1}$ zu C^k -Funktionen fortsetzbar. Das sind $(n-1)^2$ Fortsetzbarkeitsbedingungen für die v_n^v . (Natürlich hätte man auch von v_b^β mit beliebigem $b \in \{1, \dots, n\}$ ausgehen können.)

55. BEISPIELE ($n=2$): Sei $\xi := \xi_1^2$, $\tilde{\xi} := \xi_2^1$, $v := v_1^2$, $\tilde{v} := v_2^1$. Es gibt nur eine Fortsetzbarkeitsbedingung, nämlich

$$v(x^a, \xi) = -\xi^3 \tilde{v}(x^a, \tilde{\xi}) = -\xi^3 \tilde{v}(x^a, \frac{1}{\xi})$$

Wenn v ein C^k -Richtungsfeld beschreiben soll, muß $v(x^a, \xi)$ C^k auf $\mathbb{R}^3$ sein und $\xi^3 v(x^a, \tilde{\xi}^{-1})$ auf den ganzen $(x^a, \tilde{\xi})$ -Raum zu einer C^k -Funktion fortsetzbar sein.

56. BEISPIEL 1: M sei beliebig zweidimensional, zB. $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{S}^2$. Wähle

$$v(x^a, \xi) = 0 \quad ,$$

dann ist

$$\bar{\xi}^a v(x^a, \bar{\xi}^{-1}) = 0 \quad .$$

v beschreibt also ein C^ω -Richtungsfeld. Wie man leicht sieht, können Kurven der Pfadstruktur durch

$$\ddot{x}^a = 0$$

beschrieben werden. Die Pfade sind Geraden (in den lokalen Koordinaten).

C^ω -Richtungsfelder erhält man auch bei Vorgabe von

$$v(x^a, \xi) = \sum_{i=0}^a \alpha_i(x^a) \xi^i$$

mit C^ω -Funktionen α_i . Eine wichtige Bemerkung zu C^ω -Pfadstrukturen findet sich in 78,79 .

57. BEISPIEL 2: Wir wählen

$$v(x^a, \xi) = \xi^p \quad , \quad p \geq 3$$

Dann ist
$$\bar{\xi}^a v(x^a, \bar{\xi}^{-1}) = \bar{\xi}^a \bar{\xi}^{-p} = \bar{\xi}^{a-p}$$

nicht stetig fortsetzbar für $\bar{\xi} = 0$. v definiert kein spezielles Richtungsfeld über DM.

58. Eine Übersicht über die bis jetzt definierten Bündel, Bezeichnungen und Koordinaten findet sich in der Übersicht (Tab. 1) auf Seite 26 .

T a b e l l e 1

Bündel	dim	Punkte	Kurven	Pfade	Koordinaten
M	n	p	γ	$\Gamma, \tilde{\gamma}$	(x^a)
TM	2n	X, Y_p	$\gamma^T, \dot{\gamma}$	$\tilde{\gamma}^T$	(x^a, y^b)
DM	2n-1	ξ, η_p	$\gamma^D, \dot{\gamma}$	$\tilde{\gamma}^D, \dot{\Gamma}$	(x^a, ξ_b^β)
T^2M	4n	X, Y_X	$\gamma^{TT}, \ddot{\gamma}$		(x^a, y^b, u^c, w^d)
TDM	4n-2	ξ, η_ξ			$(x^a, \xi_b^\beta, u^c, \rho_b^\delta)$
D^2M	4n-3	Ξ, Θ_{ξ}	γ^{DD}	$\ddot{\Gamma}$	$(x^a, \xi_b^\beta, K_B^A)$
$T^{SF}TM$	3n	X, Y_X	$\ddot{\gamma}$		(x^a, y^b, w^c)
$D^{SP}DM$	3n-2	Ξ, Θ_ξ		$\ddot{\Gamma}$	$(x^a, \xi_b^\beta, v_b^\gamma)$

II.3 Integralkurven von speziellen Richtungsfeldern

59. Ein spezielles C^k -Richtungsfeld Ξ über DM definiert nach 41 immer eine Pfadstruktur $\mathcal{P}$ auf M . Um die Pfade rechnerisch erfassen zu können, ist es nötig, sie lokal durch repräsentierende Kurven zu beschreiben. Ein (noch näher zu bestimmendes) System von Kurven in M , das die Pfade von $\mathcal{P}$ lokal repräsentiert nennen wir Integralkurvensystem von E .

60. Wir betrachten Ξ in der Koordinatenumgebung $U \subset D^2M$ mit Koordinaten $(x^a, \xi^\beta, \eta^\gamma, v^\delta)$. Dort gelte

$$\Xi = (x^a, \xi^\beta, \xi^\gamma, v^\delta(x^b, \xi^\alpha)) \quad .$$

LEMMA: In einem Gebiet $V \subset (\pi_D \circ \Pi_D)(U) \subset M$ sind Integralkurven von Ξ gegeben als Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}^\alpha &= v^\alpha(x^a, \frac{\dot{x}^\beta}{\dot{x}^n}) \cdot (\dot{x}^n)^2 + f(x^a, \dot{x}^b) \frac{\dot{x}^\alpha}{\dot{x}^n} =: \varphi^\alpha(x^a, \dot{x}^b) \\ \dot{x}^n &= f(x^a, \dot{x}^b) =: \varphi^n(x^a, \dot{x}^b) \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist f eine bzgl. $\dot{x}^a$ homogene Funktion vom Grad 2 und k -mal stetig differenzierbar für alle $(x^a) \in V$ und für alle $(\dot{x}^b)$ mit $\dot{x}^n \neq 0$. Eine andere Wahl von f entspricht einer Änderung der Parameter der Lösungskurven.

61. Dann gibt es zu jedem Punkt $p = (x^a) \in V$ und jedem Vektor $X = (\dot{x}^a) \in T_p M$ mit $\dot{x}^n \neq 0$ eine eindeutige maximale Lösungskurve in V mit diesen Anfangswerten. Ist γ eine Lösungskurve, so ist die Richtung ihres Lifts nach $DM, \dot{\gamma}$, in einem Punkt $\gamma(s) \in V$ nach 49,50 gegeben durch

$$\underline{(\dot{\gamma})} \cdot (\mathbb{E}) = \left(x^a, \frac{\dot{x}^b}{\dot{x}^n}, \frac{\dot{x}^c}{\dot{x}^n}, \left(\frac{\dot{x}^d}{\dot{x}^n} \right) \cdot \dot{x}^n \right) = (x^a, \xi^\beta, \xi^\gamma, v^d) \quad .$$

Also ist $\dot{\gamma}$ Vertreter eines Integralpfades von $\mathbb{E}$ und γ Vertreter eines Pfades von $\mathcal{P}$.

62. Wenn f in 60 so gewählt werden kann, daß die n Funktionen $\varphi^a(x^b, \dot{x}^c)$ für alle $\dot{x}^a$ differenzierbar sind, so ist das zugehörige spezielle Vektorfeld

$$\mathbf{X} : TV \rightarrow T^{\text{sp}}TV : (x^a, y^b) \mapsto (x^a, y^b, \varphi^c(x^a, y^b))$$

ein Spray [1] über V ($\mathbf{X}$ ist offensichtlich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und die φ^a sind homogen vom Grad 2 in y^b). Daß so eine Wahl zumindest für $n=2$ immer möglich ist, wird im Anhang zu Kapitel II bewiesen (64ff.)

63. ANMERKUNG: Mit den Pfadstrukturen verwandt ist der Begriff der Wegesysteme (Geometry of Paths) [6,7,8]. Obwohl hierbei gelegentlich von Pfaden ausgegangen wird, werden diese Systeme immer durch Kurven beschrieben, es wird also eine feste Parameterisierung verwendet, die bei Pfadstrukturen eben nicht vorhanden ist. Erst wenn zusätzlich noch eine Struktur auf der Mannigfaltigkeit gegeben ist, die es erlaubt, eine Parameterisierung auszuzeichnen (zB. durch eine Metrik), kann eine Pfadstruktur durch ein einziges Kurvensystem beschrieben werden. Eine befriedigende Definition der Differenzierbarkeit ist erst bei unserer Definition der Pfadstruktur möglich.

Anhang

64. Wir zeigen, daß man für $n=2$ zu jeder Pfadstruktur ein repräsentierendes Spray wie in 62 finden kann. Wir verwenden die Bezeichnungen von 55, unterdrücken aber bei den Funktionen v, f usw. die Koordinaten (x^a) im Argument. Außerdem sei $(x^1, x^2) = (x, y)$. Über einer Koordinatenumgebung $U \subset M$ ist eine Pfadstruktur gegeben durch Funktionen $v(\xi), \bar{v}(\bar{\xi})$. Es gilt

$$\bar{v}(\bar{\xi}) = -\bar{\xi}^a v(\bar{\xi}^{-1})$$

$$\xi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \bar{\xi} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

Repräsentierende Kurvensysteme erhält man als Lösung von

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(\dot{x}, \dot{y}) \\ \ddot{y} &= \dot{x}^2 v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) + \frac{\dot{y}}{\dot{x}} f(\dot{x}, \dot{y}) \end{aligned} \quad (\dot{x} \neq 0)$$

mit f beliebig homogen vom Grad 2 in $(\dot{x}, \dot{y})$.

65. SATZ: Ist die Pfadstruktur von der Klasse C^k (und damit auch v und $\bar{v}$), $k \geq 1$, dann kann f so gewählt werden, daß

$$\begin{aligned} v(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0) : \ddot{x}(\dot{x}, \dot{y}), \ddot{y}(\dot{x}, \dot{y}) &\in C^k \\ v(\dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2 : \ddot{x}(\dot{x}, \dot{y}), \ddot{y}(\dot{x}, \dot{y}) &\in C^1. \end{aligned}$$

Dh. es existiert immer ein repräsentierendes C^1 -Spray auf TU und ein C^k -Spray auf $TU \setminus \{0_p / p \in U\}$.

66. BEWEIS: Wegen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{1}{\dot{x}} \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi)$$

folgt aus $v(\xi) \in C^k$, daß $v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \in C^k$ bezüglich $\dot{y}$ bei $\dot{x} \neq 0$.

Außerdem

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}^2} \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi),$$

also auch $v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \in C^k$ bezüglich $\dot{x}$ für $\dot{x} \neq 0$ und für alle $\dot{y}$.

Wählt man also $f(\dot{x}, \dot{y})$ als C^k -Funktion für $\dot{x} \neq 0$ und für alle $\dot{y}$, so sind $\ddot{x}, \ddot{y} \in C^k$ für $\dot{x} \neq 0$ und für alle $\dot{y}$.

Wegen der Homogenität zweiten Grades von $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ gilt immer:

Wenn $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ für $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0) \in C^k$ sind, dann sind diese Funktionen in $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ mindestens C^1 , und die ersten Ableitungen verschwinden dort:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (\ddot{x}, \ddot{y}) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

67. Im Folgenden sei $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$. Wir betrachten zunächst einige triviale Fälle:

(i) $\dot{x}^2 v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ ist C^k für alle $\dot{x}$.

Wähle $f=0$, dann folgt die Behauptung.

(ii) $v\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^3$

Wähle $f = -\dot{y}^2 = \ddot{x}$, dann ist $\ddot{y} = 0$ und $\ddot{x}, \ddot{y}$ sind C^ω .

Anmerkung: Unter (i) und (ii) fallen alle geodätischen Pfadstrukturen (vgl. 76, 77). Sie können durch C^ω -Sprays auf TU beschrieben werden.

68. Es bleibt noch der nichttriviale Fall:

(iii) $\dot{x}^2 v(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$ nicht C^k für $\dot{x}=0$ und v nicht Polynom in $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Wir definieren eine Hilfsfunktion

$$\Phi(\dot{x}, \dot{y}) = - \frac{\dot{x}^3}{\dot{y}} v(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}) .$$

Mit $f = \Phi$ ist $\ddot{y} = 0$, also C^ω , aber im allgemeinen ist $\ddot{x} = \Phi$ nicht C^k in $\dot{y} = 0$. Wegen

$$v(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}) = v(\xi) = - \xi^3 \bar{v}(\frac{1}{\xi}) = - (\frac{\dot{y}}{\dot{x}})^3 \bar{v}(\frac{\dot{x}}{\dot{y}})$$

$$\text{ist} \quad \Phi(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{y}^2 \bar{v}(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}) .$$

$\bar{v}$ ist C^k für alle $\dot{x}$ und für $\dot{y} \neq 0$, also ist $\ddot{x} = \Phi$ C^k für alle $\dot{x}$.

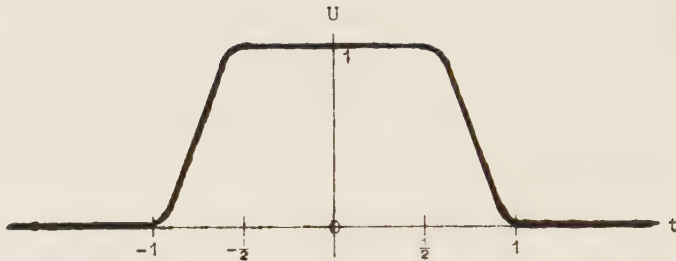
69. Betrachte eine zweite Hilfsfunktion (Abb. 1)

$$U(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{\int_0^1 \exp(-1/(\tau(1-\tau))) d\tau}{\int_0^1 \exp(-1/(\tau(1-\tau))) d\tau} & |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$U(t)$ verschwindet identisch für $|t| > 1$, und $U(t)$ ist C^∞ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{d^n}{dt^n} U(t) = 0 \quad \text{für} \quad |t| \leq \frac{1}{2}, |t| \geq 1, n \in \mathbb{N} .$$

Abb. 1



Mit

$$f(\dot{x}, \dot{y}) = \varphi(\dot{x}, \dot{y}) \cdot U\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)$$

sind $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ C^k für alle $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$. Dies ist klar für Punkte $(\dot{x}, \dot{y})$ mit $\dot{x} \neq 0$ und $\dot{y} \neq 0$. Für $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = b \neq 0$ gilt in einer Umgebung von $(0, b)$ (zB. in $(-\frac{b}{2} < \dot{x} < \frac{b}{2}, \frac{b}{2} < \dot{y} < \frac{3b}{2})$, falls $b > 0$) $U(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}) = 1$, also $f = \varphi$ und $\ddot{y} = 0$, somit $\ddot{y}$ C^k in dieser Umgebung von $(0, b)$. Außerdem ist dort $\ddot{x} = f$ ebenfalls C^k wegen $\dot{y} \neq 0$.

Sei andererseits $\dot{x} = a \neq 0$, $\dot{y} = 0$. In einer Umgebung dieses Punktes (zB. in $(\frac{a}{2} < \dot{x} < \frac{3a}{2}, -\frac{a}{2} < \dot{y} < \frac{a}{2})$, falls $a > 0$) ist $U(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}) = 0$. Also ist dort $\ddot{x} = \varphi \cdot U = 0$, somit C^k , und $\ddot{y} = \dot{x}^2 v(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$ auch C^k , da $\dot{x} \neq 0$ ist.

Damit ist der Satz (65) bewiesen. Eine Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen ($n > 2$) scheint zumindest mit diesem Beweisverfahren nicht möglich zu sein, sodaß diese Frage offen bleiben muß.

III. GEODÄTISCHE PFADSTRUKTUREN

III.1 Geodäten und spezielle Richtungsfelder

70. Sei auf der Mannigfaltigkeit M ein linearer Zusammenhang gegeben. Da M parakompakt angenommen wird, existiert immer so ein Zusammenhang [3,9]. In lokalen Koordinaten sind die affin parameterisierten Geodäten die Lösungen eines Differentialgleichungssystems

$$\ddot{x}^a = - \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c .$$

Man sieht sofort, daß die von den Geodäten definierten Pfade eine Pfadstruktur $\mathcal{P}_\Gamma$ erzeugen.

71. Mit den Richtungskoordinaten von 51 auf $D^{\text{sp}}\text{DM}$ beschreiben wir das von $\mathcal{P}_\Gamma$ erzeugte spezielle Richtungsfeld Ξ_Γ

$$\Xi_\Gamma = (x^a, \xi^\beta, v^\delta) = (x^a, \frac{\dot{x}^\beta}{\dot{x}^n}, \frac{\ddot{x}^\delta \dot{x}^n - \dot{x}^\delta \dot{x}^n}{(\dot{x}^n)^3}) ,$$

also

$$\begin{aligned} v^\delta &= \frac{1}{(\dot{x}^n)^3} (\Gamma_{cd}^n \dot{x}^c \dot{x}^d \dot{x}^\delta - \Gamma_{cd}^\delta \dot{x}^c \dot{x}^d \dot{x}^n) = \\ &= \Gamma_{cd}^n \xi^c \xi^d \xi^\delta - \Gamma_{cd}^\delta \xi^c \xi^d , \end{aligned}$$

wobei $\xi^n := 1$ ergänzt wurde.

Die das Richtungsfeld charakterisierenden Funktionen v^α sind Polynome in den Richtungskoordinaten ξ^β , höchstens vom dritten Grad; die Koeffizienten sind Linearkombinationen der Γ_{bc}^a 's.

72. Wir untersuchen, welche Monome mit welchen Koeffizienten in v^α auftreten. Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\xi^n = 1$ ist; zB. kann das Produkt $\xi^c \xi^d \xi^\delta$ von 1., 2., oder 3. Grad in ξ^α sein (griechische Indizes sind immer ungleich n !). Wertet man so den Ausdruck für v^δ in 71 aus, so ergibt sich

T a b e l l e 2

	Monom	Koeffizient	Bemerkungen
(a)	$\xi^\alpha \xi^\beta \xi^\delta$	$2\Gamma_{(\alpha\beta)}^n$	$\alpha \neq \beta$
(b)	$\xi^\alpha \xi^\alpha \xi^\delta$	$\Gamma_{\alpha\alpha}^n$	
(c)	$\xi^\alpha \xi^\beta$	$-2\Gamma_{(\alpha\beta)}^\delta$	$\delta \neq \alpha \neq \beta \neq \delta$
(d)	$\xi^\alpha \xi^\alpha$	$-\Gamma_{\alpha\alpha}^\delta$	$\alpha \neq \delta$
(e)	$\xi^\alpha \xi^\delta$	$2\Gamma_{(\alpha n)}^n - 2\Gamma_{(\alpha\delta)}^\delta$	$\alpha \neq \delta$
(f)	$\xi^\delta \xi^\delta$	$2\Gamma_{(\delta n)}^n - \Gamma_{\delta\delta}^\delta$	
(g)	ξ^α	$-2\Gamma_{(\alpha n)}^\delta$	$\alpha \neq \delta$
(h)	ξ^δ	$\Gamma_{nn}^n - 2\Gamma_{(\delta n)}^\delta$	
(i)	1	$-\Gamma_{nn}^\delta$	

Es fallen zwei Tatsachen auf, nämlich daß nicht alle Monome dritter Ordnung vorkommen und daß offensichtlich verschiedene Zusammenhänge Γ_{bc}^a die gleichen Funktionen v^α erzeugen können - und damit die gleiche Pfadstruktur.

73. Wenden wir uns zunächst der zweiten Eigenschaft zu. Wir suchen verschiedene Zusammenhänge, die dieselbe Pfadstruktur erzeugen. Die von den Geodäten erzeugten Pfade müssen also übereinstimmen. Dagegen haben wir Freiheit bei der Parameterisierung.

SATZ: Zwei Zusammenhänge Γ, Γ' auf M definieren dieselbe Pfadstruktur $\mathcal{P}$ genau dann, wenn sich Γ und Γ' nur durch die Torsionen und um eine projektive Änderung unterscheiden, dh.

$$\Gamma'^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + T^a_{bc} + \delta^a_{(b} \psi_{c)}$$

mit $T^a_{bc} = T^a_{[bc]}$ und ψ_c beliebig. Die Geodäten von Γ und Γ' unterscheiden sich dann nur durch die Parameterisierung.

74. BEWEIS: Man sieht sofort, daß die Torsion keine Rolle spielt, da sowohl in die Koeffizienten von v^α wie in die Geodätengleichungen (70) nur der symmetrische Anteil von Γ, Γ' eingeht. Betrachtet man eine Änderung um $\delta^a_{(b} \psi_{c)}$, so erhält man in den Termen Tab. 2 (a), ... (d), (g), (h) keinen Beitrag, weil der obere Index jeweils verschieden von beiden unteren ist ($\delta^a_b = 0$), in den übrigen Fällen ist die Differenz ebenfalls Null. Da man weiß, daß die projektiven Änderungen genau den Umparameterisierungen entsprechen und man nicht mehr Freiheit hat, ohne die Pfade zu ändern, müssen damit auch alle Änderungen des Zusammenhanges erfaßt sein.

75. Wie bereits erwähnt (72), kommen in v^α nicht alle Monome dritter Ordnung vor (außer für $n=2$, s.u.). Es fällt auf, daß die Monome dritter Ordnung in v^α jeweils einen Faktor ξ^α enthalten. Monome ohne diesen Faktor fehlen. (Bei $n=2$ gibt es nur eine

Koordinate $\xi^1 = \xi$ und eine Funktion $v^1 = v$. Hier tritt nur das einzig mögliche Monom ξ^3 auf.) Es gibt aber $n-1$ Funktionen v^α , die dann entsprechend andere Monome enthalten. Jedoch sind die Koeffizienten von v^γ, v^δ nicht unabhängig. Die Monome $\xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma$ bei v^γ und $\xi^\alpha \xi^\beta \xi^\delta$ bei v^δ haben denselben Koeffizienten $2\Gamma_{(\alpha\beta)}^n$ bzw. $\Gamma_{\alpha\alpha}^n$ ($\alpha = \beta$). Dagegen treten in allen v^γ jeweils alle Monome niedriger Ordnung auf (es sei denn, die Koeffizienten verschwinden), und zwar mit unabhängigen Koeffizienten für verschiedene γ .

76. SATZ: Sind für ein stetiges spezielles Richtungsfeld die Funktionen v^α (für alle α) Polynome in ξ^β , so sind sie höchstens dritter Ordnung und die Monome und Koeffizienten gehorchen den in 75 genannten Einschränkungen.

BEWEIS: Man verwendet die Formeln von 52 für den Übergang zu anderen Karten und zeigt, daß jedes Polynom, das obige Bedingungen nicht erfüllt, in mindestens einer anderen Karte auf eine Unstetigkeitsstelle führt. Hier sei nur für $n=2$ auf das Beispiel 57 verwiesen. In höheren Dimensionen schließt man analog, wenn auch mit beträchtlich größerem Rechenaufwand.

77. Gibt man sich ein beliebiges spezielles Richtungsfeld vor, das obige Bedingungen erfüllt, so lassen sich immer nach Tab. 2 Funktionen Γ_{bc}^a finden, die dieses Richtungsfeld beschreiben. Wir fassen zusammen:

SATZ: Zu einem speziellen C^1 -Richtungsfeld Ξ gibt es dann und nur dann einen linearen Zusammenhang Γ , dessen Geodäten die Pfadstruktur erzeugen, wenn die Koordinaten v^α von Ξ Polynome in ξ^β sind. Γ ist dann bis auf Torsion und projektive Änderungen bestimmt.

78. Aufgrund dieser Polynomeigenschaften ist es möglich, eine weitere Charakterisierung geodätischer Pfadstrukturen zu finden. Dazu muß man komplexe Mannigfaltigkeiten benützen. Komplexfizierungen wollen wir mit $*$ bezeichnen (zB. wäre $\mathbb{R}^* = \mathbb{C}$). Die Fasern von $(TM)^*$ und $(DM)^*$, also T_p^*M , D_p^*M sind isomorph zu $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{P}^{n-1}$. Das Bündel $(DM)^*$ ist lokal $M \times \mathbb{P}^{n-1}$, eine Komplexfizierung von $D^{sp}DM$ erhält man lokal durch $M \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$. In $(DM)^*$, $(D^{sp}DM)^*$ führt man komplexe Richtungskoordinaten ξ^α , v^β ein wie im reellen Fall. Eine Komplexfizierung eines speziellen Richtungsfeldes Ξ auf DM ,

$$\Xi : (x^a, \xi^\beta) \rightarrow (x^a, \xi^\beta, v^\gamma(x^a, \xi^\beta))$$

erhält man, wenn man $x^a, \xi^\beta \in \mathbb{C}$ zuläßt, also

$$\Xi^* : (*x^a, *\xi^\beta) \rightarrow (*x^a, *\xi^\beta, *v^\gamma(*x^a, *\xi^\beta))$$

79. SATZ: Ist ein C^ω -Richtungsfeld $\Xi : DM \rightarrow D^{sp}DM$ sogar komplex analytisch (C^ω) bezüglich der Faserkoordinaten von DM , dann erzeugt Ξ eine geodätische Pfadstruktur.

BEWEIS: $\Xi : C^\omega$ in obigem Sinn ist äquivalent mit der Bedingung, daß $*v^\alpha(*x^a, *\xi^\beta)$ komplex analytisch bzgl. $*\xi^\beta$ ist (in jeder Karte).

(1) $n = 2$: $D_p^* M = \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} =$ Riemannsche Zahlenkugel. $\mathbb{C}$ wird beschrieben durch die auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $\bar{v}^*(\xi)$. Es gilt die Fortsetzbarkeitsbedingung von 55

$$\bar{v}^*(\xi) = -\xi^3 \bar{v}^*(\xi^{-1})$$

mit $\bar{v}^* \in C^\omega$ auf $\mathbb{C}$. Also darf $\bar{v}^*$ in $\infty \in \mathbb{C}$ höchstens einen Pol 3. Ordnung haben. Somit ist $\bar{v}^*$ ein Polynom höchstens 3. Ordnung und beschreibt eine geodätische Pfadstruktur.

(2) $n > 2$: Wir weisen darauf hin, daß $D_p^* M = \mathbb{P}^{n-1}$ ein Abschluß des $\mathbb{C}^{n-1}$ ist und für ganze holomorphe Funktionen auf $\mathbb{P}^{n-1}$ eine Verallgemeinerung des Satzes von Liouville gilt: Diese Funktionen müssen Konstante sein [10,11]. Die Fortsetzbarkeitsbedingungen (52) für $\bar{v}^{\alpha}$ bedeuten auch hier, daß die $\bar{v}^{\alpha}$ meromorph auf $\mathbb{P}^{n-1}$ sind mit Polen auf dem Rand. Daraus folgt wieder, daß es Polynome sein müssen.

ANMERKUNG: Für die Formulierung des Satzes hätte es genügt, anstatt M zu komplexifizieren, nur die Fasern T_p^M und D_p^M über reellem M zu komplexifizieren. $T_p^* M$ und $D_p^* M$ sind in diesem Fall keine Tangential (Richtungs)-Räume über M .

III.2 Geodätische Sprays

80. Ein Zusammenhang Γ auf M kann durch sein geodätisches Spray $X : TM \rightarrow T^{Sp} TM$ beschrieben werden. In Koordinaten (vgl. 62) gilt dann

$$X = (x^a, y^b, \varphi^c(x^d, y^e)) = (x^a, y^b, -\Gamma_{de}^c(x^f) y^d y^e) \quad .$$

φ^a ist also eine quadratische Form in y^a und somit C^ω bzgl. dieser Argumente. Jedes geodätische Spray ist C^ω bezüglich der Faservariablen von TM . Die Differenzierbarkeitsklasse bzgl. Koordinaten von M , entsprechend der Klasse von $\Gamma_{bc}^a(x^d)$, spielt für die folgenden Überlegungen keine Rolle und sei $\mathcal{O}E$ gleich der Differenzierbarkeitsklasse der Mannigfaltigkeit (C^k mit $k \geq 3$). In diesem Kapitel beziehen sich Aussagen über Differenzierbarkeit immer auf die Abhängigkeit von den Faserkoordinaten (y^a).

81. HILFSSATZ: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine homogene Funktion vom Grad r und C^r in $\mathbb{R}^n$, dann ist f eine r -Form auf $\mathbb{R}^n$ (und folglich C^ω).

BEWEIS: Die Homogenität bedeutet

$$f(sx^a) = s^r \cdot f(x^a) \quad .$$

r -malige Differentiation nach s ergibt

$$f_{,b_1 \dots b_r}(sx^a)x^{b_1} \dots x^{b_r} = r! f(x^a) \quad .$$

Daraus folgt für $s = 0$

$$f(x^a) = \frac{1}{r!} f_{,b_1 \dots b_r}(0)x^{b_1} \dots x^{b_r} \quad .$$

Dies ist ein homogenes Polynom in x^a .

82. Ein beliebiges Spray X der Klasse C^2 muß wegen dieses Satzes immer geodätisch sein. X wird durch Funktionen $\varphi^a(x^b, y^c)$ gegeben, die in y^a homogen von Grad 2 sind. Aus der Differenzier-

barkeit folgt, daß φ^a Formen sein müssen. Also kann man φ^a durch Koeffizienten Γ_{bc}^a beschreiben,

$$\varphi^a(x^b, y^c) = - \Gamma_{bc}^a (x^b)_y y^c, \quad ,$$

und diese als von einem linearen symmetrischen Zusammenhang herrührend interpretieren.

83. Es ergibt sich folgende Verbindung mit Pfadstrukturen:

SATZ: Jede geodätische Pfadstruktur kann durch ein C^ω -Spray repräsentiert werden. Gibt es zu einer Pfadstruktur ein repräsentierendes Spray, das auf ganz TM mindestens C^2 ist, so ist die Pfadstruktur geodätisch.

ANMKERKUNGEN: Auch zu geodätischen Pfadstrukturen gibt es Sprays, die nur C^1 oder weniger sind (schlechte Repräsentantenwahl). Bei der Überprüfung, ob ein Spray geodätisch ist, genügt es, die Glattheit in der Umgebung des Nullschnittes $\{0_v / v \in M\}$ zu untersuchen. Die Glattheit außerhalb folgt dann automatisch (wegen 81).

84. Wenn eine Pfadstruktur durch ein Spray X der Klasse C^1 , aber C^2 außerhalb des Nullschnittes, beschrieben ist, so lassen sich auch hier verallgemeinerte Zusammenhangskoeffizienten einführen. Die Integralkurven sind Lösungen von

$$\ddot{x}^a = \varphi^a(x^b, \dot{x}^c)$$

mit φ^a homogen vom Grad 2 und C^1 bzgl. $\dot{x}^a$, C^2 für $(\dot{x}^a) \neq 0$.

Nach der Eulerschen Homogenitätsrelation läßt sich das schreiben als

$$\ddot{x}^a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^b \partial \dot{x}^c} \varphi^a(x^d, \dot{x}^e) \dot{x}^b \dot{x}^c =: - F_{bc}^a(x^d, \dot{x}^e) \dot{x}^b \dot{x}^c.$$

Wenn φ^a nicht C^2 ist in $(\dot{x}^a)=0$, hängt F_{bc}^a noch vom Vektor $(\dot{x}^a)$ ab, und zwar homogen vom Grad 0. F_{bc}^a ist also eine Funktion der Richtung und nicht stetig für $(\dot{x}^a) = 0$. Durch eine gegebene Pfadstruktur ist F_{bc}^a analog zu 73 nur bis auf Torsion und projektive Änderungen bestimmt; hierbei darf die Torsion homogen von der Richtung abhängen.

85. Die F_{bc}^a werden Komponenten einer nichtlinearen Übertragung (früher: nichtlinearer Zusammenhang) genannt (siehe zB. [6,12]). Nichtlineare Übertragungen spielen eine wichtige Rolle in Finslerschen Geometrien [12]. Dort gibt es auch ein Analogon zu Satz 83. Man kann nämlich aufgrund von Homogenitätseigenschaften die Riemannschen Metriken unter den Finslerschen ebenfalls durch Differenzierbarkeitsaussagen auf dem Nullschnitt von TM auszeichnen.

III.3 Zusammenhänge im Bündel der linearen Basen, nichtlineare Übertragungen

86. Eine weitgehend analoge Charakterisierung der geodätischen unter den allgemeineren Kurvensystemen erhält man bei einer Beschreibung von Zusammenhängen im Bündel der linearen Basen LM (Frame-Bündel). Da die geometrische Anschaulichkeit jedoch wesentlich besser ist, soll der Gedankengang hier skizziert werden. Wir greifen auf die Darstellung von B. Schmidt [13] zurück und übernehmen den dort eingeführten Formalismus (Nummern in runden Klammern beziehen sich auf Gleichungen dieser Arbeit).

87. Ein linearer Zusammenhang Γ auf M wird im Frame-Bündel durch Auszeichnung gewisser Teilräume von TLM beschrieben (horizontale Teilräume). Nach (10,17) Gl. (4) hat ein Element eines horizontalen Teilraumes, ein horizontaler Vektor $h \in T_u^{LM}$ die Koordinatendarstellung

$$h : T_{\pi(u)}^M \rightarrow T_u^{LM} : a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{jm}^i a^j X_s^m \frac{\partial}{\partial X_s^i} .$$

h ist linear.

88. Die Verbindung mit linearen Zusammenhängen, die in herkömmlicher Weise auf M definiert sind, ergibt sich durch folgende Konstruktion: Man erzeugt horizontale Lifts von Kurven in M nach LM , indem man die Basisvektoren eines Frames u längs der Kurve parallelverschiebt. Also für eine Kurve γ in M :

$$\text{Lift: } \gamma(t) \rightarrow (\gamma(t), X_i(t)) ,$$

wobei

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_i(t) = 0 .$$

Die Menge der Tangentenvektoren an horizontale Kurven durch u ergibt den horizontalen Teilraum H_u .

89. Da man auch mit einer verallgemeinerten Übertragung eine "Parallelverschiebung" definieren kann, lassen sich auch hier Lifts ins Bündel LM erzeugen. Die Parallelverschiebung eines Vektors X im geodätischen Fall schreibt sich in Koordinaten

$$\dot{X}^a + \Gamma_{bc}^a (x^d) \dot{x}^b X^c = 0 .$$

Die Verallgemeinerung durch die Substitution

$$\Gamma_{bc}^a(x^d) \rightarrow F_{bc}^a(x^d, y^e)$$

ist jedoch auf zwei Arten möglich:

$$(L) \quad \dot{X}^a + F_{bc}^a(x^d, \dot{X}^e) \dot{X}^b \dot{X}^c = 0$$

$$\text{oder} \quad (M) \quad \dot{X}^a + F_{bc}^a(x^d, X^e) \dot{X}^b \dot{X}^c = 0 \quad .$$

In invarianter Schreibweise wollen wir dafür folgende Bezeichnungen wählen:

$$\overset{L}{\nabla}_{\dot{X}} \dot{X} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{M}{\nabla}_{\dot{X}} \dot{X} = 0 \quad .$$

90. ANMERKUNG: Diese Verschiebungen sind bei C^1 -Sprays möglich, da nicht $F_{bc}^a(y^d)$ sondern $F_b^a(y^d) = F_{bc}^a(y^d) y^c$ benötigt wird, also muß in

$$\ddot{X}^a = f^a(x^b, \dot{X}^c)$$

nicht zweimal, sondern nur einmal nach $\ddot{X}^a$ differenziert werden.

Die Verschiebungen sind dann definiert durch

$$\dot{X}^a + F_b^a(\dot{X}^c) \dot{X}^b = 0$$

$$\text{oder} \quad \dot{X}^a + F_b^a(X^c) \dot{X}^b = 0 \quad .$$

Die Eindeutigkeit der Lösungen ist aber bei C^1 -Pfaden nicht gesichert.

91. Untersuchen wir die Eigenschaften der beiden Verschiebungen.
Wie bei linearen Zusammenhängen gilt (vgl. (9.4)):

$$\overset{L}{\nabla}_{fX}Z = f\overset{L}{\nabla}_XZ$$

$$\overset{M}{\nabla}_{fX}Z = f\overset{M}{\nabla}_XZ$$

$$\overset{L}{\nabla}_X(fZ) = f\overset{L}{\nabla}_XZ + (Xf)Z$$

$$\overset{M}{\nabla}_X(fZ) = f\overset{M}{\nabla}_XZ + (Xf)Z$$

wegen der Homogenität von F_{bc}^a .

92. Die L-Verschiebung ist offensichtlich linear in dem Sinne, daß lineare Abhängigkeiten erhalten bleiben:

$$\overset{L}{\nabla}_Z(aX+bY) = a\overset{L}{\nabla}_ZX + b\overset{L}{\nabla}_ZY$$

(daher die Bezeichnung L-Verschiebung). Dagegen gilt im allgemeinen nicht

$$\overset{L}{\nabla}_{(X+Y)}Z = \overset{L}{\nabla}_XZ + \overset{L}{\nabla}_YZ \quad .$$

93. Im zweiten Fall, bei der M-Verschiebung gilt zwar

$$\overset{M}{\nabla}_{(X+Y)}Z = \overset{M}{\nabla}_XZ + \overset{M}{\nabla}_YZ \quad ,$$

aber die Linearität bezüglich der verschobenen Vektoren bleibt nicht erhalten. Falls es aber eine Finslermetrik gibt, deren Christoffelsymbole durch $F_{bc}^a(x^d, y^e)$ gegeben sind, ist die M-Verschiebung längenerhaltend bezüglich dieser Metrik (metrisch) [6,12]. Die Bezeichnung "Parallelverschiebung" ist nur im ersten Fall angemessen.

94. Wir beschreiben jetzt eine Übertragung mit L -Verschiebung im Bündel LM . Es ist klar, daß man horizontale Vektoren wie in 87 erhält mittels der Abbildung

$$h_L : T_{\pi(u)}M \rightarrow T_u LM : a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - F_{lm}^i(a^j) a^l X_s^m \frac{\partial}{\partial x_s^i} .$$

h_L ist nicht linear, wenn F_{lm}^i von a^j abhängt. Damit ist $H_u := h_L(T_{\pi(u)}M)$ kein Teilraum von $T_u LM$, sondern nur eine "horizontale Teilmenge" (n -dimensionaler topologischer Raum). In $a^i = 0$ ist h_L stetig, aber nicht C^1 , und C^2 für $a^i \neq 0$ (nach 84).

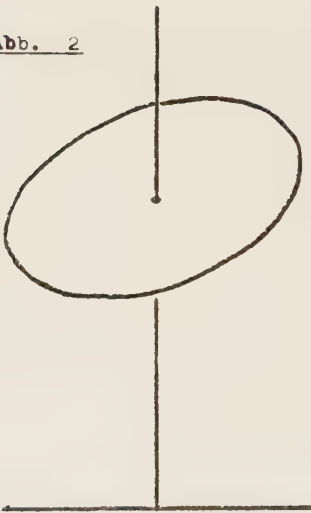
95. Diese Eigenschaften der horizontalen Teilmengen H_u lassen sich sehr anschaulich deuten. Im geodätischen Fall ist H_u ein Teilraum, den wir uns niederdimensional als Ebene vorstellen können. Ist H_u nichtlinear, so sind die Vektoren h_L doch homogen vom Grad 1 in a^i , also $h_L(\lambda a^i) = \lambda h_L(a^i)$. Zu proportionalen (a^i) gehörende Vektoren h_L liegen auf einer Geraden durch $h(0) = 0_u \in T_u LM$. H_u wird also erzeugt von Geraden durch 0_u (die aber keinen Teilraum bilden). Man kann sich niederdimensional so etwas wie ein strahlenförmiges Wellblech oder eine Halskrause vorstellen (Abb. 2).

96. Im übrigen erfüllen die Mengen H_u die Eigenschaften (1) und (2) der Definition (9.1), also

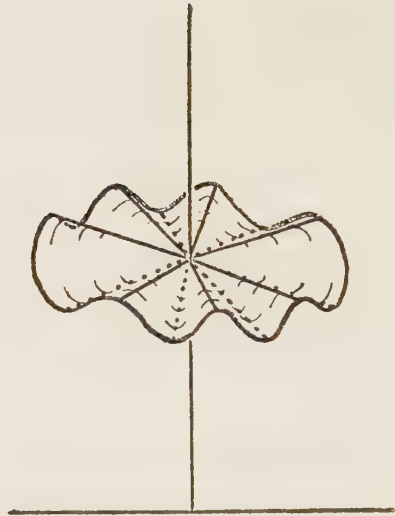
$$\pi_* H_u = T_{\pi(u)}M$$

$$(R_a)_* H_u = H_{ua} .$$

Abb. 2



linear



nichtlinear

Zur Beschreibung der Differenzierbarkeit verallgemeinert man die Forderung (3) wie folgt: Äquivalent zu (3) in (9.1) ist (für lineare Zusammenhänge) die Aussage [14] :

Für jedes C^k -Vektorfeld w auf LM ist der horizontale Anteil hw wieder ein C^k -Vektorfeld auf LM .

Wenn der Zusammenhang nichtlinear ist, gelten noch die Aussagen:

Für jedes C^k -Vektorfeld w auf LM ist der horizontale Anteil hw ein stetiges Vektorfeld auf LM .

Ist auf $V \subset LM$ $hw \neq 0$, so ist $hw : V \rightarrow TV$ ein C^2 -Vektorfeld (für $k \geq 2$, wenn die Übertragung C^2 ist im Sinne von 84).

97. Versucht man eine nichtlineare Übertragung mit M -Verschiebung in LM zu beschreiben, so liefert eine Abbildung

$$h_M : T_{\pi(u)} M \rightarrow T_u LM : a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - F_{lm}^i (X_S^j) a^l X_S^m \frac{\partial}{\partial X_S^i}$$

zwar horizontale Teilräume, jedoch sind diese nicht mit der Strukturgruppe $Gl(n, \mathbb{R})$ verträglich, dh.

$$(R_a)_* H_u \neq H_{u\alpha}$$

wegen der Nichtlinearität der Verschiebung. Diese hat auch zur Folge, daß bei M -Verschiebung Basen entarten, linear unabhängige Vektoren also in linear abhängige übergehen können. Deswegen ist ein Lift von Kurven im allgemeinen nicht möglich.

98. Wir betrachten statt der Abbildungen R_a nur die Teilmenge

$$R_\alpha : (p, X_l) \rightarrow (p, \alpha X_l) \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

entsprechen der Transformationsgruppe

$$\mathcal{G} = \left\{ a = (a_k^i) \in Gl(n, \mathbb{R}) / a = \alpha e = (\alpha \delta_k^i) \right\}.$$

Dann gilt

$$(R_\alpha)_* H_u = H_{u\alpha}$$

wegen der Homogenitätseigenschaften der F_{kl}^i .

Umgekehrt läßt sich diese Eigenschaft verwenden, um nichtlineare $(M-)$ Übertragungen im Bündel zu definieren [15].

III.4 Zusammenhänge im Bündel der projektiven Basen, Richtungsübertragungen

99. Da wir Pfadstrukturen mit dem projektiven Konzept von Richtungen beschreiben, liegt es nahe, auch den Begriff des Frame-Bündels projektiv abzuwandeln. Man kann entsprechend den linearen Basen projektive Koordinatensysteme betrachten. In dem davon gebildeten Hauptfaserbündel lassen sich ebenfalls Zusammenhänge (mittels horizontaler Teilräume) definieren. Man könnte vermuten, daß solche Zusammenhänge direkt auf Pfadstrukturen führen, so wie Zusammenhänge in LM Kurvensysteme (von Geodäten) beschreiben. Dies wird im folgenden untersucht; dabei werden wir nur von linearen Zusammenhängen sprechen, jedoch ist eine Verallgemeinerung auf nichtlineare Übertragungen und somit auf beliebige Pfadstrukturen im Sinne des vorhergehenden Paragraphen möglich.

100. In 17 haben wir eine Richtung $\underline{X}_p \in D_p M$ definiert als Äquivalenzklasse von Vektoren, $\underline{X}_p = \{\lambda X_p / \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$. Als projektive Basis v von $D_p M$ bezeichnen wir eine Äquivalenzklasse von linearen Basen u von $T_p M$, nämlich

$$v = \underline{u} = \{\lambda u / \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\},$$

oder, wenn $u = (p, X_1, \dots, X_n)$,

$$v = \{(p, \lambda X_1, \dots, \lambda X_n) / \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}.$$

Eine projektive Basis ist also ein n -Bein, das bis auf den Maßstab festliegt.

101. Eine Richtung $\underline{X}$ ist bezüglich $\underline{v}$ durch ein n -Tupel von Zahlen beschrieben, die bis auf einen gemeinsamen Faktor festliegen. Ist nämlich ein Repräsentant X von $\underline{X}$ in einem Frame u (mit $\underline{u} = \underline{v}$) durch n Zahlen a^i gegeben,

$$X = a^i X_i, \quad u = (p, X_1, \dots, X_n),$$

so ist ein anderer Repräsentant X' von $\underline{X}$ in einem anderen Frame u' (mit $\underline{u}' = \underline{v}$) gegeben durch

$$X' = a'^i X'_i = \lambda a^i X_i, \quad u' = (p, X'_1, \dots, X'_n)$$

mit $\lambda \neq 0$.

102. Bilden wir die Menge aller projektiven Frames zu allen Punkten $p \in M$, so erhalten wir das Bündel der projektiven Basen, PM , mit der Projektion

$$\pi_P : PM \rightarrow M : v \mapsto p,$$

(wenn $v = \underline{u} = (p, X_1, \dots, X_n)$ ist).

Längs der Fasern $\pi_P^{-1}(p)$ wirkt die projektive Gruppe $PGl(n, \mathbb{R})$

In Matrixdarstellung sind ihre Elemente die Äquivalenzklassen

$$\alpha = \{(\lambda a_K^i) / \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, (a_K^i) \in Gl(n, \mathbb{R})\}, \text{ also}$$

$$PGl(n, \mathbb{R}) = Gl(n, \mathbb{R}) / \mathfrak{Z}$$

$$\text{mit } \mathfrak{Z} = \{\lambda E^{(n,n)} / \lambda \neq 0\} = \{(\lambda \delta_K^i) / \lambda \neq 0\}.$$

103. Die Wirkung der Gruppe von rechts bezeichnen wir mit R_α und es gilt

$$R_\alpha(v) = v\alpha = \underline{(p, X_k a_1^k)},$$

wobei $(a_1^k) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ ein Repräsentant von α ist und
 $\underline{(p, X_1, \dots, X_n)} = v$.

104. Nun wenden wir die Definition eines Zusammenhanges auf einem Hauptfaserbündel auf PM an [3] .

DEFINITION: Ein linearer P -Zusammenhang auf M ist eine Abbildung, die jedem $v \in PM$ einen n -dimensionalen Teilraum $\mathcal{H}_v \subset T_v PM$ zuordnet, sodaß

$$(1) \quad \pi_{P*} \mathcal{H}_v = T_{\pi_P(v)} M$$

$$(2) \quad (R_\alpha)_* \mathcal{H}_v = \mathcal{H}_{v\alpha}$$

$$(3) \quad \mathcal{H}_v \text{ ist } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{)} .$$

105. SATZ: Jeder lineare P -Zusammenhang definiert eine geodätische Pfadstruktur auf M .

Zunächst wollen wir zeigen, daß ein P -Zusammenhang immer eine (zunächst beliebige) Pfadstruktur erzeugt.

106. Um von den Zusammenhängen in LM zu den Geodäten zu gelangen, macht man Gebrauch von standard-horizontalen Vektorfeldern. Bei P -Zusammenhängen kann man einen etwas schwächeren Begriff einführen.

DEFINITION: Sei $(r^i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Äquivalenzklasse eines n -Tupels reeller Zahlen. Dann gibt es ein standard-horizontales Richtungsfeld β (in DPM), definiert durch

$$\pi_{P*} B_v = r^i X_i, \quad ,$$

wobei $B_v \in \mathcal{H}_v$ ein Repräsentant von β in $v \in PM$ ist und $(p, X_1, \dots, X_n) = v$.

Man sieht leicht ein, daß diese Definition sinnvoll ist und das Richtungsfeld β von der Klasse C^k ist.

107. Wie in 35, 36 zeigt man, daß es eindeutige, maximale Integralpfade von β in PM gibt. Projiziert man diese Pfade nach M , so erhält man ein System, das die Definition 37 einer Pfadstruktur erfüllt. Denn zu jeder Richtung $\underline{X}$ in $D_p M$ gibt es eine Richtung in $D_v PM$ mit $\pi_{P*} B_v = r^i X_i = \underline{X}$, somit einen Integralpfad in PM , dessen Projektion in M die Richtung $\underline{X}$ hat. Andererseits haben Integralpfade in PM , deren Projektionen in M in einem Punkt die gleiche Richtung haben, überall die gleiche Richtung. Sie haben also dieselbe Projektion (dies folgt wie in LM im wesentlichen aus dem Transformationsgesetz von β längs der Fasern unter der projektiven Gruppe).

108. Um zu beweisen, daß diese Pfadstrukturen geodätisch sind, zeigt man, daß jeder P -Zusammenhang als "Projektion" eines linearen Zusammenhanges in LM erhalten werden kann. Ist Π_L die Projektion

$$\Pi_L : LM \rightarrow PM : u \mapsto \underline{u}, \quad ,$$

so nennen wir einen Zusammenhang in PM die Projektion eines Zusammenhanges in LM, wenn für die entsprechenden horizontalen Teilräume gilt

$$\Pi_{L*}(H_u) = \mathcal{H}_u \quad .$$

109. Wir führen die notwendigen Rechnungen in lokalen Koordinaten durch. Nach Schmidt [13] verwenden wir in LM die Koordinaten

$$(x^i, x_1^k) \Leftrightarrow (p, x_1, \dots, x_n) = u$$

In PM kann man analog zu DM inhomogene Koordinaten einführen, nämlich

$$(x^i, y_\beta^\alpha) = (x^i, \frac{x_\beta^\alpha}{x_s^r}) \Leftrightarrow u \quad ,$$

wobei $(\frac{\alpha}{\beta}) \neq (\frac{r}{s})$ zu einem festen $(\frac{r}{s})$ mit $x_s^r \neq 0$. Jeder Wert von $(\frac{r}{s})$ bezeichnet eine Karte. Von den n^2 möglichen sind jedoch nur n nötig, zB. $(\frac{1}{1}), \dots, (\frac{1}{n})$, da immer ein $x_1^a \neq 0$ existiert ($(x_1, \dots, x_n)$ ist Basis, also kein $x_i = 0$). Für die Rechnung beschränken wir uns auf die Karte Nr. $(\frac{1}{1})$ mit $x_1^1 \neq 0$.

110. Das Differential Π_{L*} bzgl. dieser Koordinaten ist beschrieben durch die $(n^2-1) \times n^2$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{x_1^2}{(x_1^1)^2} & \frac{1}{x_1^1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x_1^3}{(x_1^1)^2} & 0 & \frac{1}{x_1^1} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{x_1^n}{(x_1^1)^2} & 0 & & & \frac{1}{x_1^1} \end{pmatrix}$$

Hiermit berechnen wir die Koordinatendarstellung der Menge $\Pi_{L*}(H_u)$.

111. Ein horizontaler Teilraum H_u läßt sich beschreiben (Schmidt [13], Satz 10.2) als

$$H_u = \left\{ h \mid h = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i \Gamma_{ik}^1 X_\beta^k \frac{\partial}{\partial x_\beta^1}, a^i \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Wendet man darauf Π_{L*} an, so erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_{L*}(H_u) &= \left\{ \chi \mid \chi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (a^i \Gamma_{ik}^\alpha X_\beta^k / X_1^1 - a^i \Gamma_{ik}^1 X_1^k X_\beta^\alpha / (X_1^1)^2) \frac{\partial}{\partial y_\beta^\alpha} \right\} = \\ &= \left\{ \chi \mid \chi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (a^i \Gamma_{ik}^\alpha Y_\beta^k - a^i \Gamma_{ik}^1 Y_1^k Y_\beta^\alpha) \frac{\partial}{\partial y_\beta^\alpha}, a^i \in \mathbb{R}^n \right\}, \end{aligned}$$

worin $Y_1^1 := 1$ zu setzen ist.

Man sieht sofort, daß $\Pi_{L*}(H_u)$ linear und n -dimensional ist und nicht von niedrigerer Differenzierbarkeitsklasse als H_u . Wir können $\Pi_{L*}(H_u)$ also als horizontalen Teilraum $\mathcal{H}_u$ von TPM bezeichnen.

112. Zu zeigen bleibt noch, daß die Gruppe $PGL(n, \mathbb{R})$ in der gewünschten Weise wirkt, also daß für $\alpha \in PGL(n, \mathbb{R})$

$$(R_\alpha)_* \mathcal{H}_u = \mathcal{H}_{u\alpha}.$$

Wir bemerken zunächst, daß für Repräsentanten $u \in \underline{u}$ und $a \in \alpha$ gilt

$$\underline{ua} = \underline{u} \underline{a}.$$

Sei nun der horizontale Vektor $h \in H_u$ Tangentenvektor einer horizontalen Kurve u , $h = \dot{u}(t)$. Dann gilt folgende Identität:

$$\begin{aligned}
(R_\alpha)_* \mathcal{X}_{\underline{u}} &\ni (R_\alpha)_* \Pi_{L*}(\dot{u}(t)) = (R_\alpha)_*(\Pi_L(u))^*(t) = \\
&= (R_\alpha)_* \dot{u}(t) = (R_\alpha \underline{u})^*(t) = (\underline{u}\alpha)^*(t) = (\underline{u}\underline{\alpha})^*(t) = \\
&= (\underline{u}\underline{\alpha})^*(t) = (\Pi_L(u\alpha))^*(t) = \Pi_{L*}(u\alpha)^*(t) = \\
&= \Pi_{L*}(R_\alpha u)^*(t) = \Pi_{L*} R_{\alpha*}(\dot{u}(t)) \in \Pi_{L*}(H_{u\alpha}) = \mathcal{X}_{\underline{u}\alpha} .
\end{aligned}$$

$\mathcal{X}_{\underline{u}}$ definiert also einen Zusammenhang auf PM.

113. Umgekehrt kann man zeigen, daß jeder Zusammenhang auf PM als Projektion eines Zusammenhanges in LM erhalten werden kann. Seien also lineare Teilräume $\mathcal{X}_v$ in TPM mit den nötigen Eigenschaften ausgezeichnet. Im Punkt $v = \underline{u} = (\underline{p}, \underline{x}_1) = (\underline{x}^j, \delta_i^k)$, also der Äquivalenzklasse der Einheitsbasis, führen wir dieselben inhomogenen Koordinaten wie oben ein, $v = (x^j, \delta_\beta^\alpha)$. Dann läßt sich ein horizontaler Teilraum durch Zahlen $Z_{i\beta}^\alpha$ beschreiben:

$$\mathcal{X}_v = \left\{ x / \dot{x} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i Z_{i\beta}^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta^\alpha}, a^i \in \mathbb{R}^n \right\} .$$

114. Ein horizontaler Teilraum über LM im Punkte $u = (x^i, \delta_k^j)$ wird beschrieben durch

$$H_u = \left\{ h / \dot{h} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i \Gamma_{i1}^k \frac{\partial}{\partial x_1^k}, a^i \in \mathbb{R}^n \right\}$$

und für die Projektion gilt nach 111:

$$\begin{aligned}
\Pi_{L*} H_u &= \left\{ x / \dot{x} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (a^i \Gamma_{ik}^\alpha \delta_\beta^k - a^i \Gamma_{ik}^1 \delta_\beta^\alpha \delta_1^k) \frac{\partial}{\partial y_\beta^\alpha} = \right. \\
&= \left. a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (a^i \Gamma_{i\beta}^\alpha - a^i \Gamma_{i1}^1 \delta_\beta^\alpha) \frac{\partial}{\partial y_\beta^\alpha}, a^i \in \mathbb{R}^n \right\} .
\end{aligned}$$

Wenn $Z_{i\beta}^\alpha = \Gamma_{i\beta}^\alpha - \Gamma_{11}^1 \delta_{\beta}^\alpha$, dann ist $\mathcal{K}_V = \Pi_{L*} H_U$ (in der Einheitsbasis über $p \in M$). Das läßt sich aber immer erfüllen; definiere zB .

$$\Gamma_{i\beta}^\alpha = Z_{i\beta}^\alpha + \Gamma_{11}^1 \delta_{\beta}^\alpha$$

mit Γ_{11}^1 beliebig (und von der gewünschten Differenzierbarkeitsklasse).

115. Nach dem Transformationsgesetz der $\mathcal{K}_V$ unter $(R_\alpha)_*$ und wegen

$$(R_\alpha)_* \Pi_{L*} H_U = \Pi_{L*} (R_\alpha)_* H_U$$

ist klar, daß der P -Zusammenhang längs der ganzen Faser über $p \in M$ als Projektion desselben Zusammenhanges Γ in LM erhalten werden kann. Die Änderung der $\mathcal{K}_V$ quer zu den Fasern und damit die funktionale Abhängigkeit $Z_{i\beta}^\alpha(x^k)$ wird durch die entsprechende Abhängigkeit $\Gamma_{k1}^1(x^m)$ ausgedrückt.

116. Wegen 114 gehört zu zwei Zusammenhängen Γ, Γ' genau dann derselbe P -Zusammenhang, wenn gilt:

$$\Gamma'^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + \varphi_b \delta^a_c$$

mit irgendeinem $\varphi_b(x^a)$. Solche Zusammenhänge definieren aber dieselbe Richtungsübertragung; dh.: Wird ein Vektor $X = X(0)$ längs einer Kurve γ in M von $\gamma(0)$ nach $\gamma(t)$ mit Γ bzw. Γ' parallelverschoben, so sind die Vektoren $X(t)$, $X'(t)$ proportional, also $X(t) = X'(t)$. (Siehe dazu [16], dort wird auch gezeigt, daß obige Relation zwischen Γ und Γ' notwendig und hinreichend dafür ist, daß Γ, Γ' dieselbe Richtungsübertragung definieren. Beachte, daß die unteren Indizes bei Γ^a_{bc} dort vertauscht sind.)

117. FOLGERUNGEN: Ein P -Zusammenhang definiert eine geodätische Pfadstruktur und eine Richtungsübertragung, enthält also mehr Struktur als eine Pfadstruktur. Dagegen reicht er nicht aus, um einen eindeutigen linearen Zusammenhang auf M auszuzeichnen.

Im Falle $n = 2$ gibt es zu jedem P -Zusammenhang genau einen linearen symmetrischen Zusammenhang auf M . Für $n > 2$ existiert im allgemeinen kein symmetrischer Zusammenhang, der unter Π_L einen gegebenen P -Zusammenhang erzeugt.

118. ANMERKUNG: Wie in III.3 lassen sich in PM auch nicht-lineare Übertragungen und die zugehörigen Verschiebungen definieren. Hierdurch kann man auch für allgemeinere Pfadstrukturen Richtungsübertragungen längs Kurven in M erhalten. Es gelten ähnliche Aussagen wie in 92, 93 betreffend die Erhaltung linearer Abhängigkeit (von Richtungen) bei Richtungsübertragungen.

IV. NICHTGEODÄTISCHE PFADSTRUKTUREN

IV.1 Existenz, Beispiele

119. Alle Beispiele für Pfadstrukturen waren bis jetzt geodätisch. Man kann aber leicht nichtgeodätische Pfadstrukturen angeben.

BEISPIEL 1: Sei $n = 2$, $M = \mathbb{R}^2$ und die Bezeichnungen wie in 55. Dann ist durch

$$v(\xi) = \frac{1 - \xi^5}{1 + \xi^2}$$

eine C^∞ -Pfadstruktur auf M gegeben. Wegen 77 ist diese nicht geodätisch. $v(\xi)$ ist C^∞ und in der anderen Karte ist

$$\bar{v}(\xi) = \frac{1 - \xi^5}{1 + \xi^2},$$

also auch C^∞ . Auf $TM \setminus \{0_p / p \in M\}$ kann die Pfadstruktur zB. durch folgendes C^∞ -Spray repräsentiert werden:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\dot{y}^4}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \ddot{y} &= \frac{\dot{x}^4}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned} \quad (\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$$

Eine Integration erscheint ziemlich aussichtslos.

120. BEISPIEL 2: Unter denselben Voraussetzungen wie in 119 definieren wir

$$v(\xi) = \xi^{4/3},$$

und damit nach 55

$$\bar{v}(\xi) = -\xi^{5/3}.$$

Dies ist also eine nichtgeodätische C^1 -Pfadstruktur. Für $\dot{x} \neq 0$ werden Repräsentanten durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = \dot{x}^{2/3} \dot{y}^{4/3}$$

gegeben. Wählt man als Parameter $t = x$, so sind die Lösungen durch $(x, y) = (0, 0)$

$$y = \frac{27}{2} \left(\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{1}{b^2} \right), \quad b \neq 0$$

für $\dot{y} \neq 0$, und

$$y = 0$$

für $\dot{y} = 0$. Für $\dot{x} = 0$ kann das System durch

$$x = 0$$

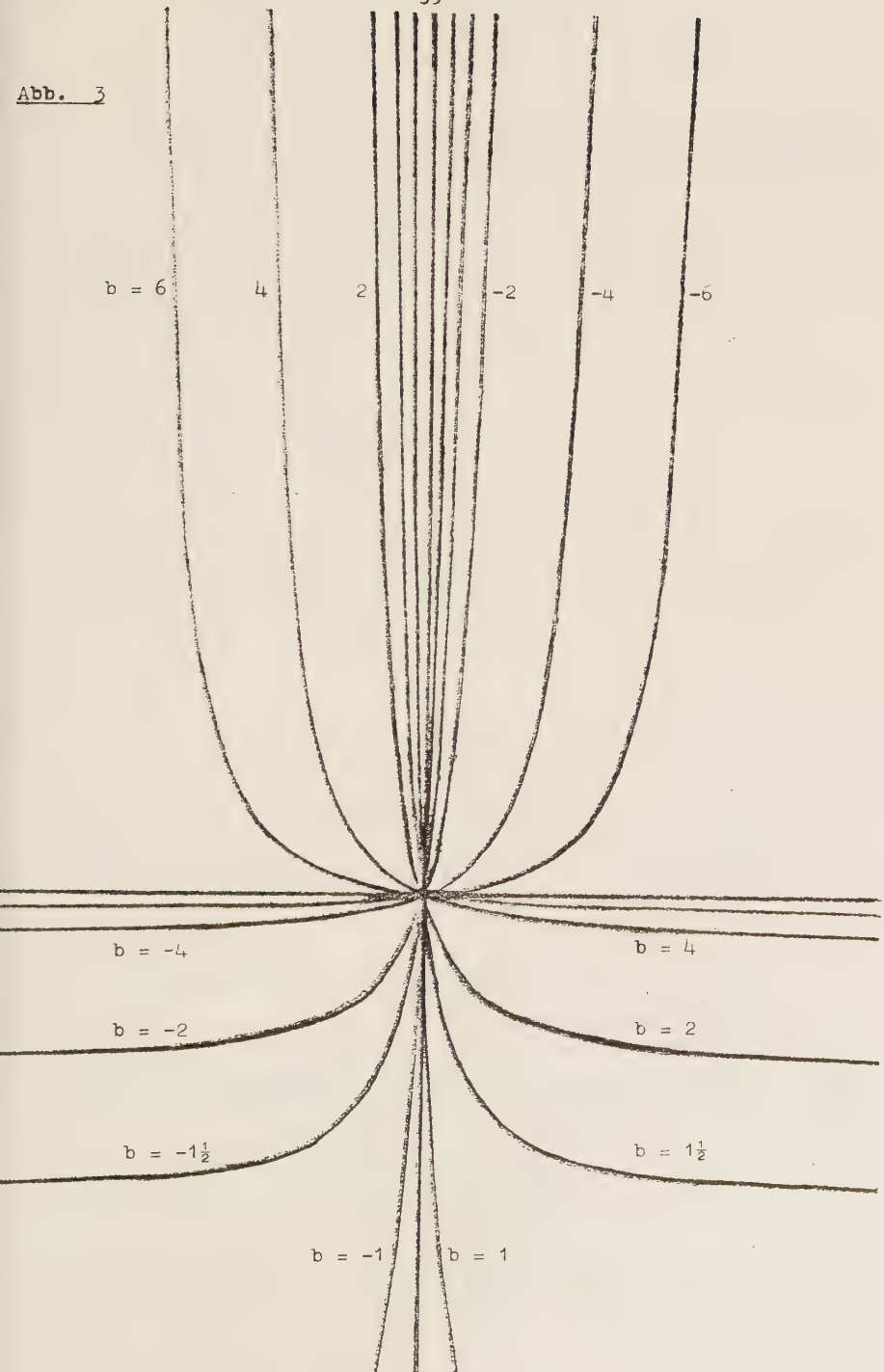
$$y = t$$

vervollständigt werden (Abb. 3). Da v nicht explizit von (x, y) abhängt, erhält man die Kurven durch Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ durch Translationen der obigen Kurven.

IV.2 Eingeschränkte Pfadstrukturen

121. Für die Anwendung der Theorie in der Physik ist es nützlich, eine andere Art von Pfadstrukturen zu definieren, die wir eingeschränkte Pfadstrukturen (E-Pfadstrukturen, $\mathcal{P}_E$) nennen wollen. Unter diesen verstehen wir anschaulich eine Menge von Pfaden auf M , sodaß durch jeden Punkt $p \in M$, aber nicht in jeder Richtung $v \in D_p^M$, ein Pfad geht. Die Menge der Richtungen in D_p^M ,

Abb. 3



zu denen es Pfade gibt, soll aber offen und einfach zusammenhängend sein.

122. DEFINITION: Der Richtungsbereich einer E-Pfadstruktur ist eine offene Teilmenge $E \subset DM$ mit

$$(1) \quad \pi_D(E) = M$$

$$(2) \quad E_p := E \cap \pi_D^{-1}(p) \quad \text{ist einfach zusammenhängende Teilmenge von } D_p M.$$

ANMERKUNG: Forderung (1) ist nicht unbedingt nötig, aber auch keine Einschränkung: Man wähle sonst als Basismannigfaltigkeit $M' := \pi_D(E)$.

123. Eine E-Pfadstruktur $\mathcal{P}_E$ (mit Richtungsbereich E) ist eine Menge von Pfaden auf M, sodaß zu jedem Punkt $p \in M$ und jeder Richtung $\xi_p \in E_p$ genau ein Pfad $\Gamma \in \mathcal{P}_E$ existiert, der p enthält und in p die Richtung ξ_p hat und für jeden Pfad $\Gamma \in \mathcal{P}_E$ liegt sein Lift nach DM, $\dot{\Gamma}$, ganz in E.

124. Analog zu Satz 38 gibt es eine äquivalente Formulierung mit speziellen Richtungsfeldern über DM.

LEMMA: Einer E-Pfadstruktur $\mathcal{P}_E$ auf M entspricht ein spezielles Richtungsfeld

$$\Xi_E : E \rightarrow D^{\text{sp}} DM,$$

dessen Integralpfade in DM schon ganz in E liegen. Wir sagen auch: Die Integralpfade von Ξ_E sind mit E verträglich.

125. Wichtige Beispiele für eingeschränkte Pfadstrukturen liefert die Allgemeine Relativitätstheorie. Dort wird der Richtungsbereich E durch die zeitartigen Richtungen bezüglich einer Lorentz-Metrik g (der Signatur $+++ -$) gegeben. (Zeitartige Richtungen sind Richtungen, die durch Vektoren X mit $g(X,X) < 0$ repräsentiert werden.) Die E -Pfadstruktur wird erzeugt von den zeitartigen Geodäten dieser (pseudo-)riemannschen Metrik. Solche Pfadstrukturen werden in Kap. VI betrachtet.

126. Physikalische Beispiele für nichtgeodätische eingeschränkte Pfadstrukturen gibt es in der Elektrodynamik. Sei $M = \mathbb{R}^4$ eine orientierbare Raumzeit mit Koordinaten $(x^a) = (x^1, \dots, x^4) = (x^1, x^2, x^3, t)$. Darauf sei eine Minkowski-Metrik

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Richtungsbereich E der zeitartigen Richtungen ist definiert durch

$$E = \left\{ \underline{X}_p / p \in M, X_p \in M_p, X_p = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - (X^4)^2 < 0 \right\}.$$

Teilchenbahnen und insbesondere Bahnen geladener Teilchen in einem elektromagnetischen Feld sind zeitartig. Aus allen möglichen dieser Bahnen wollen wir sovielen auszeichnen, daß sie die Forderungen an eine eingeschränkte Pfadstruktur erfüllen.

127. Wir betrachten nur Probeteilchen mit einem festen Wert der spezifischen Ladung $\frac{q}{m}$. Dazu beschreiben wir die Bewegungsgleichungen als

$$\ddot{x}^a = F^a_b \dot{x}^b$$

mit $\eta_{ac} F^c_b = F_{ab} = -F_{ba}$. Der Parameter ist die Eigenzeit und die Orientierung liegt hiermit fest. Da diese Gleichungen nicht homogen vom Grad 2 in $\dot{x}^a$ sind, hängen die Bahnen von der Richtung und vom Betrag des Anfangsvektors $(\dot{x}^a_0)$ ab. Man erhält also zu jeder Anfangsrichtung $(\dot{x}^a_0)$ mehrere mögliche Bahnen (Pfade). Zunächst schließen wir die (unphysikalischen) vergangenheitsorientierten Anfangsvektoren aus, verlangen also

$$\dot{x}^a_0 > 0$$

Weiterhin normieren wir $\dot{x}^a$ durch die Forderung

$$\dot{x}_a \dot{x}^a = \eta_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = -1$$

Jede Richtung in E_p wird also durch genau einen zukunftsorientierten Einheitsvektor repräsentiert. Die Bewegungsgleichungen lassen sich auch schreiben als

$$\ddot{x}^a = F^a_b \dot{x}^b \sqrt{-\dot{x}_a \dot{x}^a}$$

Jetzt ist $\ddot{x}^a$ homogen vom Grad 2, also ein Spray auf der Menge der zukunftsorientierten Vektoren.

128. Man kann das Richtungsfeld der eben definierten E-Pfadstruktur mit den Richtungskoordinaten von SO beschreiben. Wegen $\dot{x}^a > 0$ kommen wir mit einer Karte aus. Sei $\xi^\alpha = \xi^\alpha_+ = \frac{\dot{x}^\alpha}{\dot{x}^+}$, dann erhalten wir für

$$v^{\alpha}(\xi^{\beta}) = v^{\alpha}_{\beta}(\xi^{\beta}) = \frac{\ddot{x}^{\alpha} \dot{x}^4 - \ddot{x}^4 \dot{x}^{\alpha}}{(\dot{x}^4)^3} \quad ;$$

$$v^{\alpha}(\xi^{\beta}) = (F^{\alpha}_4 - F^{\alpha}_{\beta} \xi^{\beta} - F^4_{\beta} \xi^{\beta} \xi^{\alpha}) \sqrt{1 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2} \quad .$$

v^{α} ist auf E C^{∞} , da der Radikand immer > 0 ist (Definition von E). v^{α} beschreibt eine nichtgeodätische E -Pfadstruktur (wegen 77).

129. ANMERKUNG: Die Möglichkeit, aus den Lösungskurven einer Differentialgleichung $\ddot{x}^a = f^a(x^b, \dot{x}^c)$ eine Pfadstruktur auszusortieren, bietet erst der eingeschränkte Bereich E . Es ist zwar immer möglich, bzgl. irgendeiner Hilfsmetrik Einheitsvektoren X auszuzeichnen, doch können zu Anfangswerten $+X, -X$ inäquivalente Kurven gehören. Ist M jedoch zeitorientierbar bzgl. einer beliebigen Lorentz-Hilfsmetrik, so können wir einen eingeschränkten Bereich E erzeugen und unter den Einheitsvektoren nur zukunftsorientierte zulassen.

130. BEISPIEL: Sei $n = 2$, η_{ab} mit Signatur $(+ -)$. Wegen $F_{(ab)} = 0$ ist $F^1_1 = F^2_2 = 0$ und $F^1_2 = F^2_1 = a(x^a)$. Wir betrachten den Fall $a = 1$, also

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{y} \\ \ddot{y} &= \dot{x} \quad . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Nebenbedingungen aus 127 erhält man die Kurven

$$x = \cosh s + a$$

$$y = \sinh s + b \quad .$$

Wegen $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = \sinh^2 s - \cosh^2 s = -1$ und $\dot{y} = \cosh s > 0$ sind die Nebenbedingungen erfüllt und man sieht leicht, daß durch jeden Punkt in $\mathbb{R}^2$ und jede Richtung in E eine solche Kurve geht. Das Richtungsfeld der Pfadstruktur wird beschrieben durch ($\xi = \xi_2^1$)

$$v(\xi) = (1 - \xi^2)^{3/2} \quad (|\xi| < 1) \quad .$$

IV.3 Eingeschränkte Sprays

131. Es ist klar, daß man aus den Pfaden einer eingeschränkten Pfadstruktur $\mathcal{P}_E$ zumindest lokal ein Repräsentantensystem von Kurven herausuchen kann, die sich dann durch Differentialgleichungen 2. Ordnung beschreiben lassen.

DEFINITION: Sei $K \subset \{X \in TM \mid \underline{X} \in E\} \subset TM$, K offen in TM mit $\underline{K} = E$ und $\mathbf{X}: K \rightarrow T^2M$ Spray über K . Wenn die Integralkurven von $\mathbf{X}$ ein Repräsentantensystem von $\mathcal{P}_E$ bilden, sagen wir: $\mathcal{P}_E$ wird durch das (eingeschränkte) Spray $\mathbf{X}$ beschrieben.

132. Wir betrachten jetzt eine bestimmte Klasse solcher Sprays. Auf M (orientierbar) sei eine Lorentz-Konformstruktur $\mathcal{C}$ gegeben, also eine Äquivalenzklasse $\mathcal{g}$ von Metriken bzgl. der Relation

$$g \sim h \Leftrightarrow g(X, Y) = \Omega^2 h(X, Y) \quad \Omega > 0; \quad X, Y \in T_p M.$$

Dann sei

$$K_p := \{X \in T_p M \mid g(X, X) < 0, \quad g \in \mathcal{G}; \quad X^\perp > 0\}$$

die Menge der zukunftsorientierten zeitartigen Vektoren und

$$L_p := \{X \in T_p M \mid g(X, X) = 0, \quad g \in \mathcal{G}\}$$

der "Lichtkegel", $\text{Rd } K_p \subset L_p$. Auf

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p = \bigcup_{p \in M} K_p = \underline{K}$$

sei eine E -Pfadstruktur $\mathcal{P}_E$ gegeben.

133. Wir wählen ein $g \in \mathcal{G}$. In einer Koordinatenumgebung $U \subset M$ sei g beschrieben durch den Tensor g_{ab} (in Koordinaten x^a). Man kann für die zeitartigen Pfade repräsentierende Kurven finden, die zukunftsorientiert und nach der Bogenlänge bzgl. g parameterisiert sind. Für diese Kurven gibt es eine Beschreibung durch Differentialgleichungen

$$\ddot{x}^a = \varphi^a(x^b, \dot{x}^c) \quad g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = -1.$$

Wir beschränken uns auf den einfachen Fall, wo die φ^a Polynome in $\dot{x}^c$ sind. Also

$$\ddot{x}^a = A^a + \sum_{i=1}^k A^a_{b_1, \dots, b_i} \dot{x}^{b_1} \dots \dot{x}^{b_i}$$

mit $A^a, A^a_{b_1, \dots, b_l} \in C^\infty$ -Funktionen auf U , also $\Phi^a \in C^\infty$ auf TU .
 Wegen $\dot{x}^a \dot{x}_a = -1 = \text{const.}$ kann man o.E. fordern

$$A^a_{b_1, \dots, b_l} = A^a(b_1, \dots, b_l) \quad \text{und} \quad A^a_{b_1, \dots, b_l} g^{b_1 b_2} = 0 \quad .$$

(Dh. spurfrei und symmetrisch in allen unteren Indizes;

$A^a_{b_1, \dots, b_l} x^{b_1} \dots x^{b_l}$ sind verallgemeinerte Kugelfunktionen.

134. Sei $e(X^a) := \sqrt{-X^a X_a}$. Dann gilt für zeitartige Einheitsvektoren $\dot{x}^a$ ($e(\dot{x}^a) = 1$) :

$$\Phi^a(x^b, \dot{x}^c) = A^a e^2(\dot{x}^b) + \sum_{l=1}^k A^a_{b_1, \dots, b_l} \dot{x}^{b_1} \dots \dot{x}^{b_l} (e(\dot{x}^b))^{2-l} = \Phi^a(x^b, \dot{x}^c) \quad .$$

$\Phi^a(x^b, \dot{x}^c)$ ist homogen vom Grad 2 in $\dot{x}^a$. Die Integralkurven von $\ddot{x}^a = \Phi^a$ für beliebige Anfangswerte $\dot{x}^a_0 \in K$ müssen also dieselben zeitartigen Pfade wie diejenigen mit $e(\dot{x}^a_0) = -1$ definieren.

FOLGERUNG: Φ^a beschreibt als C^∞ -Spray über K die gegebene E-Pfadstruktur.

135. Im Hinblick auf physikalische Anwendungen interessieren wir uns für eine Fortsetzung von $\mathcal{P}_E$ auf die Lichtkegel durch eine Menge von Nullpfaden $\mathcal{P}_N$. Für diese soll gelten: Zu jeder Nullrichtung $\xi_N \in N = \underline{L} = \bigcup_p \underline{L}_p$ gibt es genau einen Pfad Γ_N durch $p = \pi_D \xi_N$ mit Richtung $\dot{\Gamma}_{Np} = \xi_N$ und der Lift $\dot{\Gamma}_N$ liegt ganz in N . Die Vereinigung $\mathcal{P}_E \cup \mathcal{P}_N = \mathcal{P}_{\bar{E}}$ ($\bar{E} = E \cup \text{Rd } E = E \cup N$) heiße Pfadstruktur mit Rand (oder $\bar{E}$ -Pfadstruktur).

136. Natürlich ist nicht jede solche Fortsetzung sinnvoll, es sollen vielmehr gewisse Verträglichkeitsbedingungen gelten.

BEISPIEL: Einfach ist die Fortsetzung bei gewissen geodätischen Pfadstrukturen. Ist nämlich $\mathcal{P}_{\bar{E}}$ auf E durch ein Spray

$$\ddot{x}^a = - \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c$$

gegeben, so definieren die Christoffelsymbole immer auch eine Pfadstruktur auf ganz TM . Man braucht sich dann nur auf Pfade mit Richtungen aus $\bar{E}$ zu beschränken. Voraussetzung ist allerdings, daß die Konformstruktur, die E definiert, mit der projektiven Struktur von Γ verträglich ist (Weyl-Struktur). Allgemeiner ist die Fortsetzung auf den Rand immer dann in "natürlicher" Weise erklärbar, wenn es zu einer gegebenen E -Pfadstruktur der Klasse C^r eine E' -Pfadstruktur (C^r) gibt mit $\bar{E} \subset E'$, E' offen; $\mathcal{P}_{\bar{E}} = \mathcal{P}_{E'}|_{\bar{E}}$ und Pfade mit Richtungen aus $Rd\ E$ liegen ganz in $Rd\ E$. Dann ist $\mathcal{P}_{E'}|_{\bar{E}}$ eine C^r -Fortsetzung auf den Rand von E .

137. Wenn $\mathcal{P}_{\bar{E}}$ durch ein Spray $X: K \rightarrow T^2M$ gegeben ist, ist folgende Bedingung für eine Fortsetzung von $\mathcal{P}_{\bar{E}}$ sinnvoll:

DEFINITION: $\mathcal{P}_{\bar{E}}$ heißt verträgliche Fortsetzung von $\mathcal{P}_{\bar{E}}$ auf den Lichtkegel, wenn sich X stetig auf $\bar{K}$ fortsetzen läßt.

Dann gilt folgender

138. SATZ: Wenn die zeitartigen Pfade einer E -Pfadstruktur, nach der Bogenlänge zukunftsorientiert parameterisiert, durch Polynome endlichen Grades beschrieben werden,

$$\ddot{x}^a = p^a_k(\dot{x}^b) \quad ,$$

und sich das dazugehörige Spray stetig auf den Zukunftslichtkegel fortsetzen läßt, so sind die Polynome $p^a_k(\dot{x}^b)$ höchstens vom 2. Grad.

(Dieser Satz wurde bereits von Geroch angegeben, jedoch mit anderem Beweis [17]).

139. BEWEIS: Sei

$$\Phi^a = A^a(e(k^b))^2 + \sum_{i=1}^k A^a_{b_1, \dots, b_i} k^{b_1} \dots k^{b_i} (e(k^b))^{2-i}$$

stetig für alle Nullvektoren k^a . Für einen Summanden

$$A^a_{b_1, \dots, b_j} k^{b_1} \dots k^{b_j} e^{2-j} \quad , \quad j > 2$$

gilt

$$e(k^a) \rightarrow 0 \Rightarrow e^{2-j} \rightarrow \infty \quad .$$

Andererseits gibt es mindestens einen Nullvektor k^a , sodaß $A^a_{b_1, \dots, b_j} k^{b_1} \dots k^{b_j} \neq 0$ ist (da $A^a_{b_1, \dots, b_j}$ spurfrei und symmetrisch). Die Summanden von Φ höherer als 2. Ordnung sind deshalb nicht stetig. Dann ist auch die Summe von $i = 3$ bis $i = k$ nicht stetig, da die Ordnungen der Pole von e^{2-i} jeweils verschieden sind. Also gilt $k \leq 2$.

140. INTERPRETATION: Betrachten wir eine E-Pfadstruktur, die Satz 138 erfüllt, sie wird also durch ein Spray

$$\ddot{x}^a = \psi^a(\dot{x}^b) = -A^a_b \dot{x}^b \dot{x}^c + A^a_b \dot{x}^b \sqrt{-x_c x^c} + A^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c$$

beschrieben. Wir definieren

$$F^a_{bc} := A^a_{bc} \mu_{bc} - A^a_{bc}$$

somit

$$\psi^a(\dot{x}^b) = A^a_b \dot{x}^b \sqrt{-x_c x^c} - F^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c.$$

Der erste Term kann entsprechend 127 als elektromagnetischer Feldstärketensor interpretiert werden.

F^a_{bc} fassen wir als Koeffizienten eines linearen Zusammenhanges auf.

141. Wie verhält sich ψ^a bei einer anderen Wahl von g aus der Konformklasse g ? Die Differentialgleichungen $\psi^a = \ddot{x}^a / \dot{x}^b$ hatten wir durch Parameterisierung nach der Bogenlänge erhalten. Wir wählen eine andere Metrik

$$\bar{g} = \omega^2 g \quad (\omega > 0).$$

Damit gilt für die Bogenlänge

$$d\bar{s} = \omega ds$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{s}} &= \omega \frac{\partial x^a}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial \bar{s}^2} &= \omega \frac{\partial^2 x^a}{\partial s^2} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial x^a}{\partial s} \frac{\partial x^b}{\partial s} \end{aligned}$$

Eingesetzt in φ^a bzw. ψ^a erhalten wir ein neues Spray, bezi. $\bar{s}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^a &= \dot{x}^a + \frac{\dot{x}^b}{x^b} \dot{x}^a = \frac{1}{x^b} A^a_b \dot{x}^b \sqrt{-\frac{1}{x^c} \dot{x}^c} - \frac{1}{x^c} \dot{x}^b \dot{x}^a \dot{x}^c - \frac{1}{x^c} \dot{x}^b \dot{x}^a \dot{x}^c \\ &= \frac{1}{x^b} A^a_b \dot{x}^b \sqrt{-\frac{1}{x^c} \dot{x}^c} - \frac{1}{x^c} \dot{x}^b \dot{x}^a \dot{x}^c - (\log x^a)_{,b} \dot{x}^b \dot{x}^a \dot{x}^c.\end{aligned}$$

142. Bei einer anderen Wahl von g ändert sich also der Tensor A^a_b . Dies ist aber nicht verwunderlich, da die Bahnen geladener Teilchen vom Betrag des Anfangsvektors abhängen. Bei Änderung des Konformfaktors ändern wir aber auch die "Länge" der Einheitsvektoren $\dot{x}^a$. Der neue Zusammenhang $\bar{\Gamma}^a_{bc}$ unterscheidet sich nur um eine projektive Änderung $(\log x^a)_{,b} \dot{x}^b \dot{x}^a$, die der Umparameterisierung $s \rightarrow \bar{s}$ entspricht. Es folgt

143. SATZ: Ist eine E-Pfadstruktur gegeben, die die Bedingungen von Satz 138 erfüllt, so können die Pfade als Bahnen von Teilchen konstanter spezifischer Ladung in einer Weyl-Geometrie aufgefaßt werden.

Es werden also unter den E-Pfadstrukturen physikalisch besonders wichtige Fälle ausgezeichnet. Andererseits darf man nicht vergessen, daß die Einschränkung der φ^a auf Polynome physikalisch nicht motiviert werden kann; vielleicht ist aber eine Verallgemeinerung auf beliebige Funktionen möglich.

144. ANMERKUNG: Eine andere Definition von Verträglichkeit, die keinen Gebrauch von Sprays (und damit von ausgezeichneten Parametern) macht, ist die folgende: $\bar{\Gamma}^a_{bc}$ ist verträgliche Fortsetzung von Γ^a_{bc} .

wenn das spezielle Richtungsfeld Ξ_E von $\mathcal{P}_E$ stetig (evtl. C^k -) Fortsetzung des Richtungsfeldes Ξ_E von $\mathcal{P}_E$ ist, mit

$$\Xi_E|_E = \Xi_E$$

$$\Xi_E(\text{Rd } E) = \text{Rd}(\Xi_E(E)) \text{ .}$$

V SYMMETRIEN

V.1 Definition der Symmetrien von Pfadstrukturen

145. Ziel dieses Abschnittes ist es, geodätische Pfadstrukturen unter allgemeineren durch ihre (vermutete) besonders hohe Symmetrie auszuzeichnen. Als Symmetrien wollen wir Abbildungen der Mannigfaltigkeit auf sich bezeichnen, die die Menge der Pfade festläßt. Existieren "genügend viele" solche Abbildungen, so nennen wir die Pfadstruktur isotrop.

146. Sei $\varphi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus (C^k mit $k \geq 2$). φ induziert eine Abbildung der Pfade $\Gamma \in \mathcal{P}$ auf neue Pfade Γ' . Da φ ein Diffeomorphismus ist, bilden die Pfade Γ' wieder eine Pfadstruktur $\mathcal{P}'$ auf M .

147. Das Differential von φ ,

$$\varphi_* : TM \rightarrow TM, \quad T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} M,$$

induziert eine Abbildung

$$\underline{\varphi}_* : DM \rightarrow DM, \quad D_p M \rightarrow D_{\varphi(p)} M$$

vermöge $\underline{\varphi}_*(\xi) := (\varphi_* X)$ für $X \in \xi$. Offensichtlich ist die Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, da φ_* linear ist. $\underline{\varphi}_*$ bildet die Richtung eines Pfades Γ in p auf die Richtung des Pfades $\Gamma' = \varphi(\Gamma)$ in $\varphi(p)$ ab. $\underline{\varphi}_*$ ist bijektiv auf DM . Man kann also $\underline{\varphi}_*$ als Abbildung des Lifts $\tilde{\Gamma}$ von $\Gamma \in \mathcal{P}$ auf den Lift $\tilde{\Gamma}'$ von $\Gamma' \in \mathcal{P}'$ auffassen.

148. Wie vorher betrachten wir nun das Differential

$$(\varphi_*)_* : \text{TDM} \rightarrow \text{TDM}$$

und dazu

$$\Phi_{**} := \underline{(\varphi_*)_*} : D^2M \rightarrow D^2M .$$

Es ist sofort klar, daß

$$\Phi_{**}(D^{\text{sp}}_{\text{DM}}) \subset D^{\text{sp}}_{\text{DM}} .$$

Wir interessieren uns hier nur noch für die Einschränkung

$$\Phi_{**} : D^{\text{sp}}_{\text{DM}} \rightarrow D^{\text{sp}}_{\text{DM}}$$

Φ_{**} bildet die Richtung eines Pfades $\dot{\Gamma}$ in ξ auf die Richtung des Pfades $\dot{\Gamma}'$ in $\underline{\varphi_*}(\xi)$ ab.

149. Beschreiben wir die Pfadstruktur $\mathcal{P}$ durch das zugehörige spezielle Richtungsfeld

$$\Xi : \text{DM} \rightarrow D^{\text{sp}}_{\text{DM}} ,$$

dann können wir das Ergebnis von 146-148 so formulieren:

LEMMA: Ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow M$ induziert Bijektionen

$$\Phi_* := \underline{\varphi_*} : \text{DM} \rightarrow \text{DM}$$

$$\Phi_{**} : D^{\text{sp}}_{\text{DM}} \rightarrow D^{\text{sp}}_{\text{DM}}$$

und folglich bestimmt φ eine Bijektion der Menge aller Pfadstrukturen auf M : Für ein spezielles Richtungsfeld $\Xi : DM \rightarrow D^{sp}DM$ ist $\Phi_{**}\Xi$ wieder ein spezielles Richtungsfeld.

150. DEFINITION: $\varphi : M \rightarrow M$ ist eine Symmetrie von $\mathcal{P}$, wenn der $\mathcal{P}$ definierende Schnitt Ξ bezüglich Φ_{**} invariant ist:

$$\Phi_{**}\Xi = \Xi,$$

somit

$$\Phi_{**}\Xi\xi = \Xi\Phi_*\xi.$$

Entsprechend sind (durch Einschränkung von $\mathcal{P}$ auf Umgebungen U von Punkten aus M) lokale Symmetrien von $\mathcal{P}$ (Symmetrien von $\mathcal{P}|_U$) definiert.

Unter einer $\mathcal{P}$ -Drehung um $p \in M$ verstehen wir eine p festlassende ($\varphi(p) = p$), lokale Symmetrie von $\mathcal{P}$.

Es ist klar, daß Symmetrien und $\mathcal{P}$ -Drehungen Gruppen $G(\mathcal{P})$, $G_p(\mathcal{P})$ bilden.

151. Um Aussagen über die Existenz von $\mathcal{P}$ -Drehungen machen zu können, drücken wir die Bedingungen von 150 in lokalen Koordinaten aus. Wie in 50, 51 verwenden wir in $D^{sp}DU$ die Koordinaten $(x^a, \xi_b^\beta, v_c^\gamma)$ und führen die Rechnung oE. in der Karte $(x^a, \xi_1^\beta, v_1^\gamma) = (x^a, \xi^\beta, v^\gamma)$ durch. Sei $x^a(p) = 0$ der Fixpunkt von $\varphi : U \rightarrow U$:

$$x^a \rightarrow \varphi^a(x^b) = \hat{x}^a.$$

Ein Vektor $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = (x^a, a^b)$ wird durch das Differential φ_* abgebildet auf

$$\hat{X} = \varphi_* X = \varphi^i_j \frac{\partial}{\partial x^j} = (\varphi^a(x^c), \varphi^b_d(x^c) a^d) = (\hat{x}^a, \hat{a}^b)$$

mit $\varphi^b_d = \frac{\partial \varphi^b}{\partial x^d}$ und $\det(\varphi^b_d) \neq 0$ wegen φ Diffeomorphismus.

152. Eine Richtung $\xi = \underline{X} = (x^a, \xi^\beta) = (x^a, \frac{a^\beta}{a^1})$ geht unter Φ_* über in

$$\begin{aligned} \hat{\xi} = \underline{\hat{X}} &= \underline{\varphi_* \xi} = \left(\hat{x}^a, \frac{\hat{a}^\beta}{\hat{a}^1} \right) = \left(\varphi^a(x^c), \frac{\varphi^b_d(x^c) a^d}{\varphi^1_b(x^c) a^1} \right) = \\ &= \left(\varphi^a(x^c), \frac{\varphi^b_d(x^c) a^d / a^1}{\varphi^1_b(x^c) a^1 / a^1} \right) = \left(\varphi^a(x^c), \frac{\varphi^b_d(x^c) \xi^d}{\varphi^1_b(x^c) \xi^1} \right) = \\ &=: (\varphi^a(x^c), \xi^\beta) \end{aligned}$$

wobei $\beta = 2, \dots, n$ und $\xi^1 := 1$ (Hilfsgröße).

ANMERKUNG: Da evtl. $\varphi^1_b a^b = 0$ sein kann, ist die Beschreibung von Φ_* in dieser einzigen Karte nicht immer möglich; für die Rechnung schließen wir diesen Fall aus, ohne die späteren Folgerungen dadurch zu beeinträchtigen.

153. Die Beschreibung von Φ_{**} erhält man auf dieselbe Weise:

Ein Vektor

$$\xi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = (x^a, \xi^\beta, a^b, \eta^\alpha) \in \text{TDM}$$

geht unter $(\varphi_*)_*$ über in

$$(\varphi_*)_* \xi = (\hat{x}^a, \hat{\xi}^\beta, \varphi_{bc}^a, \frac{2}{(\varphi_b^1 \xi^b)^2} (a^c \varphi_{bc}^1 \varphi_d^1 \xi^b \xi^d + \eta^\beta \varphi_{\beta b}^1 \xi^b))$$

$$\text{mit } \varphi_{bc}^a := \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial x^b \partial x^c}.$$

Ist insbesondere ξ speziell, $\xi = \Xi = (x^a, \xi^\beta, v^\gamma) \in D^{\text{sp}} DU$, mit $v^\gamma = \eta^\gamma / a^1$ (wenn $\xi = (x^a, a^\beta / a^1, a^b, \eta^\gamma)$), dann ergibt sich die Beschreibung von Φ_{**} aus $(\varphi_*)_*$ durch Normierung mit $\varphi_c^1 a^c$:

$$\begin{aligned} \Phi_{**} : (x^a, \xi^\beta, v^\gamma(x^b, \xi^\delta)) &\rightarrow \\ &\rightarrow \left(\varphi^a(x^b), \frac{\varphi_b^\beta(x^c) \xi^b}{\varphi_b^1(x^c) \xi^b}, \frac{2}{(\varphi_b^1(x^c) \xi^b)^3} \cdot \xi^a \varphi_a^1(x^c) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\varphi_b^\gamma(x^c) v^b(x^c) \xi^\beta + \varphi_{bc}^\gamma(x^d) \xi^b \xi^c \right) \right) \end{aligned}$$

mit der Hilfsgröße $v^1 := 0$.

154. Eine notwendige Bedingung dafür, daß φ eine $\mathcal{P}$ -Drehung ergibt, also für $\Phi_{**} \Xi_\xi = \Xi_{\Phi_* \xi}$, drückt sich in Koordinaten (im Fixpunkt $x^a = 0$, wir lassen diese Koordinaten weg) aus durch:

$$\frac{2}{(\varphi_b^1 \xi^b)^3} \xi^a \varphi_a^1 (\varphi_b^\gamma v^b(\xi^\beta) + \varphi_{bc}^\gamma \xi^b \xi^c) = v^\gamma \left(\frac{\varphi_b^\beta \xi^b}{\varphi_b^1 \xi^b} \right).$$

Wir müssen untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen Pfadstrukturen (v^γ) und der Lösungsgesamtheit $(\varphi_b^a, \varphi_{bc}^a)$ dieser Gleichung besteht.

155. DEFINITION: φ heißt punktale $\mathcal{P}$ -Drehung, wenn im Fixpunkt $p = \varphi(p)$ gilt:

$$\Phi_{**}\Xi\xi = \Xi_{\Phi_*}\xi \text{ für } \xi \in D_p M.$$

Dh. φ führt nicht notwendig die Pfadstruktur in sich über (oder das Richtungsfeld), sondern nur die Menge der Biegungselemente über p .
Dafür ist obige (154) Bedingung hinreichend.

V.2 Punktale Drehungen und starke Isotropie

156. Eine punktale $\mathcal{P}$ -Drehung φ in p wird in lokalen Koordinaten vollständig beschrieben durch $\varphi_b^a(0)$ und $\varphi_{bc}^a(0)$.

DEFINITION: Eine Pfadstruktur ist in p punktal stark isotrop, wenn es zu jedem $(a_k^i) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ ein (b_{bc}^a) gibt (in einem, und damit auch in jedem anderen, fest gewählten Koordinatensystem), sodaß mit

$$(\varphi_b^a(0), \varphi_{bc}^a(0)) = (a_b^a, b_{bc}^a)$$

eine punktale $\mathcal{P}$ -Drehung beschrieben wird.

157. Wir können sofort zeigen, daß nur geodätische Pfadstrukturen punktal stark isotrop sein können. Dazu betrachten wir $\mathcal{P}$ -Drehungen mit $\varphi_b^a = f\delta_b^a$ ($f \neq 0, 1$), also $\varphi_b^a \in \mathcal{J}$. Eingesetzt in die Invarianzbedingung 154 ergibt sich (beachte $\underline{\varphi}_* = \text{id}_{DM}$)

$$\frac{1}{f^3} (f^2 v^Y(\xi^\alpha) + f (\varphi_{bc}^Y \xi^b \xi^c - \varphi_{bc}^1 \xi^b \xi^c \xi^Y)) = v^Y(\xi^\alpha)$$

$$\Leftrightarrow v^Y(\xi^\alpha) = \frac{-1}{f-f^2} (\varphi_{bc}^Y \xi^b \xi^c - \varphi_{bc}^1 \xi^b \xi^c \xi^Y) .$$

Die rechte Seite ist ein Polynom in ξ^α , höchstens dritten Grades, also muß zur Erfüllung der Identität v^Y eine geodätische Pfadstruktur beschreiben. Ist umgekehrt v^Y als Polynom gegeben, so erhält man Bedingungen für die φ_{bc}^a .

158. LEMMA: Nur geodätische Pfadstrukturen sind unter punktalen Dilatationen

$$x^a \rightarrow f x^a + \frac{1}{2} \varphi_{bc}^a x^b x^c + O(x^3)$$

invariant. Hierbei ist $f \neq 0$ beliebig, φ_{bc}^a hängt von f und von der Pfadstruktur (nämlich von den Polynomkoeffizienten) ab.

Wie man durch Koeffizientenvergleich sieht, ist die Beziehung zwischen den Polynomkoeffizienten und den φ_{bc}^a linear, z.B. im Falle $n = 2$:

$$v = \sum_0^2 \alpha_i \xi^i \Rightarrow$$

$$\varphi_{11}^2 = (f-f^2)\alpha_0$$

$$2\varphi_{12}^2 - \varphi_{11}^1 = (f-f^2)\alpha_1$$

$$\varphi_{22}^2 - 2\varphi_{12}^1 = (f-f^2)\alpha_2$$

$$-\varphi_{22}^1 = (f-f^2)\alpha_3$$

159. Für geodätische Pfadstrukturen gilt sogar die wesentlich stärkere Aussage:

SATZ: Die geodätischen Pfadstrukturen sind in der Menge aller Pfadstrukturen dadurch gekennzeichnet, daß sie in jedem Punkt $p \in M$ punktal stark isotrop sind.

BEWEIS: In einer Umgebung von p betrachten wir ein repräsentierendes Kurvensystem, das beschrieben wird durch

$$\ddot{x}^a = -\Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c, \quad \Gamma_{[bc]}^a = 0.$$

Man kann immer in einer Umgebung $U(p)$ Normalkoordinaten (y^a) einführen mit $y^a(p) = 0$, sodaß in $U(p)$

$$\ddot{y}^a = 0$$

längs Geodäten durch p . Wegen $\Gamma_{bc}^a(0) = 0$ ist nach 71

$$v^\alpha = 0 \quad \text{in } p.$$

Die Invarianzbedingung 154 ist dann für beliebige $\varphi_b^a(0) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$

und $\varphi_{bc}^a = 0$ erfüllt.

Dies ist auch anschaulich klar. In Normalkoordinaten sind die Geodäten durch p Geraden, und ein Geradenbüschel bleibt unter $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ erhalten.

V.3 Infinitesimale Symmetrien und schwache Isotropie

160. Für beliebige Pfadstrukturen (v^Y) ist die Bestimmung der möglichen punktalen $\mathcal{P}$ -Drehungen $(\varphi_b^a, \varphi_{bc}^a)$ als Lösungen der Funktionalgleichung 154 direkt nicht gelungen. Wir gehen deshalb zu infinitesimalen Transformationen über und können damit aus Gleichung 154 eine Differentialgleichung gewinnen, die sich leichter untersuchen läßt. Anders ausgedrückt, wir suchen statt nach der Liegruppe von Symmetrien nach der zugehörigen Lie-Algebra.

161. Wir führen in bekannter Weise [13,18] einparametrische Gruppen von infinitesimalen Transformationen ein, setzen also an

$$\varphi^a(x^b, t) \quad \text{mit} \quad \varphi^a(x^b, 0) = x^a$$

$$\varphi^a(0, t) = 0 \quad \text{für } 0 = p = \text{Fixpunkt}$$

$$\varphi_b^a(x^b, t) \quad \text{mit} \quad \varphi_b^a(0, 0) = \delta_b^a$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_b^a(0, t) \right|_{t=0} = \psi_b^a$$

$$\varphi_{bc}^a(x^b, t) \quad \text{mit} \quad \varphi_{bc}^a(0, 0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{bc}^a(0, t) \right|_{t=0} = \psi_{bc}^a \quad .$$

Eingesetzt in Gleichung 154, differenziert nach t , erhält man an der Stelle $t = 0$ (im Punkt $p = 0$) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v^{\gamma}_{,\beta}(\xi^{\alpha})(\psi^{\beta}_{\mathfrak{b}}\xi^{\mathfrak{b}} - \psi^1_{\mathfrak{b}}\xi^{\mathfrak{b}}\xi^{\beta}) + 2v^{\gamma}(\xi^{\alpha})\psi^1_{\mathfrak{b}}\xi^{\mathfrak{b}} + v^{\beta}(\xi^{\alpha})(\psi^1_{\beta}\xi^{\gamma} - \psi^{\gamma}_{\beta}) = \\ = \psi^{\gamma}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\xi^{\mathfrak{b}}\xi^{\mathfrak{c}} - \psi^1_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\xi^{\mathfrak{b}}\xi^{\mathfrak{c}}\xi^{\gamma} . \end{aligned}$$

$$(v^{\gamma}_{,\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} v^{\gamma}).$$

162. Den Spezialfall $n = 2$ schreiben wir ausführlich auf ($v = v^2$, $\xi = \xi^2$, $v' = v^2_{,2}$):

$$\begin{aligned} v'(\xi)(\psi^2_1 + (\psi^2_2 - \psi^1_1)\xi - \psi^1_2\xi^2) + v(\xi)(2\psi^1_1 - \psi^2_2 + 3\psi^1_2\xi) = \\ = \psi^2_{11} + (2\psi^2_{12} - \psi^1_{11})\xi + (\psi^2_{22} - 2\psi^1_{12})\xi^2 - \psi^1_{22}\xi^3 . \end{aligned}$$

163. Wir wollen noch einmal Satz 159 verifizieren. Dazu setzt man in Gleichung 161 Polynome (v^{γ}) mit Koeffizienten, wie in 72 angegeben, ein und erhält auf der linken Seite Polynome vom 3. Grad in ξ^{β} (die Terme 4. Grades fallen heraus). Da die Lie-Algebra von $Gl(n, \mathbb{R})$ gegeben ist durch alle $(n \times n)$ -Matrizen, muß für beliebiges $\psi^a_{\mathfrak{b}}$ Gleichung 161 erfüllbar sein. Wir führen die Rechnung für $n = 2$ durch. $v(\xi)$ sei wieder $\sum_0^3 \alpha_i \xi^i$. Dann folgt aus 162 mit Koeffizientenvergleich bzgl. Potenzen von ξ :

$$\xi^0 : \alpha_1 \psi^2_1 + \alpha_0(2\psi^1_1 - \psi^2_2) = \psi^2_1,$$

$$\xi^1 : \alpha_1(\psi^2_2 - \psi^1_1) + 2\alpha_2\psi^2_1 + 3\alpha_0\psi^1_2 + \alpha_1(2\psi^1_1 - \psi^2_2) = 2\psi^2_{12} - \psi^1_{11},$$

$$\xi^2 : -\alpha_1\psi^1_2 + 2\alpha_2(\psi^2_2 - \psi^1_1) + 3\alpha_1\psi^1_2 + \alpha_2(2\psi^1_1 - \psi^2_2) = \psi^2_{22} - 2\psi^1_{12}$$

$$\xi^3 : -2\alpha_2\psi^1_2 + 3\alpha_3(\psi^2_2 - \psi^1_1) + 3\alpha_2\psi^1_2 + \alpha_3(2\psi^1_1 - \psi^2_2) = -\psi^1_{22}$$

$$\xi^4 : -3\alpha_3\psi^1_2 + 3\alpha_3\psi^1_2 = 0$$

Für beliebige Wahl von (α_i) und (ψ_K) ist also durch entsprechende Wahl von (ψ_{n-1}^i) die Bedingung 162 immer erfüllbar. Analoges erhält man (mit höherem Rechenaufwand) für $n > 2$.

164. Bei starker Isotropie haben wir verlangt, daß zu allen $\varphi_b^a(0) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ punktale $\mathcal{P}$ -Drehungen gehören. $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ besteht aus allen Isomorphismen von $T_p M$. In unserem Fall erscheint es jedoch plausibel, sich mit Abbildungen von $D_p M$ auf sich zu begnügen. Wir suchen also eine Untergruppe von $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$, sodaß die induzierten Abbildungen φ_* "genügend" Abbildungen von $D_p M$ ergeben.

165. DEFINITION: Eine Pfadstruktur ist punktal schwach isotrop (in p), wenn es eine Lie-Untergruppe $H \subset \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ gibt, die isomorph zur projektiven Gruppe $\text{PGL}(n, \mathbb{R})$ ist, sodaß für alle $a_b^a \in H$ ein b_{bc}^a existiert mit:

$$(\varphi_b^a(0), \varphi_{bc}^a(0)) = (a_b^a, b_{bc}^a)$$

ist punktale $\mathcal{P}$ -Drehung.

ANMERKUNG: Die Forderung von 165 ist damit äquivalent, daß man verlangt, H solle transitiv auf der Menge der projektiven Basen von $D_p M$ wirken.

166. LEMMA: Geodätische Pfadstrukturen sind in jedem Punkt $p \in M$ punktal schwach isotrop.

Dies folgt aus 159; starke Isotropie schließt schwache Isotropie ein. Die früher (157) betrachteten Dilatationen $\phi_b^a(0) \in \mathcal{Z}$ induzieren die Identität auf $D_p M$ und es gilt $PGL(n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{R})/\mathcal{Z}$ (102). Deswegen lassen sich aus Lemma 158 keine Schlüsse über schwache Isotropie nichtgeodätischer Pfadstrukturen ziehen.

167. Da wir mit infinitesimalen Transformationen arbeiten wollen, müssen wir nach der Lie-Algebra fragen, die zur schwachen Isotropie gehört. $PGL(n, \mathbb{R})$ ist als Faktorgruppe, $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ als Untergruppe einer Liegruppe notwendig wieder eine Liegruppe [19]. Da $\mathcal{Z}$ eindimensional ist, ist $PGL = GL/\mathcal{Z}$ (n^2-1) -dimensional.

168. Dann ist auch die Lie-Algebra von PGL oder H eine (n^2-1) -dimensionale Unter algebra der Lie-Algebra von $GL(n, \mathbb{R})$. Die zu $GL(n, \mathbb{R})$ gehörenden infinitesimalen Transformationen sind gegeben durch die Algebra der $(n \times n)$ -Matrizen, $\mathbb{R}^{(n,n)} = \{\psi_b^a\}$. Es wird sich zeigen, daß wir die von H erzeugte Unter algebra $\mathcal{H}$ von $\mathbb{R}^{(n,n)}$ nicht genau kennen müssen, vielmehr genügen schon die Dimensionsaussagen von oben. $\mathcal{H}$ ist (n^2-1) -dimensional, das bedeutet, daß wir eine einschränkende Bedingung an die n^2 Koeffizienten von ψ_b^a stellen müssen. Anders ausgedrückt, wir können nur n^2-1 Koeffizienten von $\psi_b^a \in \mathcal{H}$ frei wählen. Ein Beispiel soll dies erläutern.

169. Sei $n = \dim M$ ungerade. Dann ist die spezielle lineare Gruppe $SL(n, \mathbb{R}) = \{a \in GL(n, \mathbb{R}) / \det a = 1\}$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$, die isomorph zu $PGL(n, \mathbb{R})$ ist, also wählen

wir $H = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$. Es ist bekannt [20], daß die Lie-Algebra von $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ aus den spurfreien $(n \times n)$ -Matrizen besteht. Wir haben also die einschränkende Bedingung $\sum_i \psi_i^i = 0$, dh. man kann nur $n-1$ Diagonalelemente frei wählen. Bei anderen Untergruppen $H \subseteq \text{Gl}$ wird man ähnliche algebraische Relationen für die Koeffizienten von ψ_k^i erwarten.

170. Nun untersuchen wir, welche Pfadstrukturen schwach isotrop sind. Sei (v^γ) eine C^ω -Pfadstruktur, die in keinem Gebiet $U \subset M$ geodätisch ist. Vorerst sei $n = 2$. Dann soll v die Gleichung 162 erfüllen, wobei ψ_b^a aus einer Unteralgebra von $\mathbb{R}^{(n,n)}$ zu wählen ist. In einer Umgebung V von $\xi_0 \in D_P^M$ entwickeln wir v in eine Potenzreihe. OB. sei $\xi_0 = 0$, dann schreiben wir

$$v = \sum_0^\infty \alpha_i \xi^i.$$

Die Reihe konvergiere in V . Da v nicht geodätisch ist und aus Differenzierbarkeitsgründen muß es unendlich viele $\alpha_i \neq 0$ geben.

171. Wir setzen die Reihen v und $v' = \sum_1^\infty i \alpha_i \xi^{i-1}$ in 162 ein. Durch Koeffizientenvergleich bzgl. Potenzen von ξ erhält man folgende Bedingungen:

$$(1+i)\alpha_{1+i}\psi_1^2 + \alpha_1((2-i)\psi_1^1 + (1-i)\psi_2^2) + \alpha_{1-i}(4-i)\psi_2^1 = 0$$

für $1 \geq 4$.

(Für $1 < 4$ enthält die rechte Seite Terme mit ψ_{k1}^i). Wir fassen die Gleichungen für $1 = 4, 5, \dots$ als homogenes Gleichungssystem für ψ_k^i auf. Die $(4 \times \infty)$ -Koeffizientenmatrix sieht explizit so aus

(bei einer Reihenfolge der Unbekannten $\psi := (\psi_1^2, \psi_1^1, \psi_2^2, \psi_2^1)$)

$$\begin{pmatrix} 5\alpha_5 & -2\alpha_4 & 3\alpha_4 & 0 \\ 6\alpha_6 & -3\alpha_5 & 4\alpha_5 & -\alpha_4 \\ 7\alpha_7 & -4\alpha_6 & 5\alpha_6 & -2\alpha_5 \\ 8\alpha_8 & -5\alpha_7 & 6\alpha_7 & -3\alpha_6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} =: A$$

172. Wenn v punktal schwach isotrop sein soll, muß die Lie-Unteralgebra der (ψ_k^i) dreidimensional sein, also muß der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems

$$A\psi = 0$$

auch dreidimensional sein. Dazu muß aber $\text{Rang } A = 1$ gelten, somit jede zweireihige Unterdeterminante von A verschwinden. Dies hat aber, wie man leicht sieht, zur Folge, daß

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \dots = 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Für $n > 2$ lassen sich dieselben Schlüsse ziehen. Wegen des unvergleichlich höheren Rechenaufwandes verzichten wir jedoch hier auf den Beweis.

173. Das Ergebnis wollen wir auf zwei Arten formulieren.

SATZ 1: Es gibt keine nichtgeodätischen C^ω -Pfadstrukturen, die überall punktal schwach isotrop sind.

SATZ 2: Ist eine Pfadstruktur $\mathcal{P}$ in einer Umgebung U von $p \in C^{\omega}$ und in U schwach isotrop, so ist $\mathcal{P}|_U$ geodätisch.

174. Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß sich diese beiden Sätze wahrscheinlich noch verallgemeinern lassen.

VERMUTUNG: Es gibt keine nichtgeodätischen C^5 -Pfadstrukturen, die überall punktal schwach isotrop sind.

175. BEGRÜNDUNG: (für $n = 2$) Differenziert man die Invarianzbedingung 162 viermal nach ξ , so erhält man auf der linken Seite einen Ausdruck, der Polynome bis zum 2. Grad und die 3., 4. und 5. Ableitung von $v(\xi)$ enthält, die rechte Seite verschwindet. Durch Einsetzen fester Werte von ξ ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem für die ψ_k^i . Es ist anzunehmen, daß man mit genügend vielen Punkten ξ den Rang der Koeffizientenmatrix immer größer als 1 machen kann. Dann ist v nicht schwach isotrop.

176. VERMUTUNG: Es gibt keine nichtgeodätischen C^1 -Pfadstrukturen, die überall punktal schwach isotrop sind.

BEGRÜNDUNG: Wie in 175 kann man wahrscheinlich direkt aus der Invarianzbedingung 162 für diskrete Werte von ξ ein Gleichungssystem der gewünschten Art erhalten.

177. Die Fälle 174, 176 sind physikalisch ohnehin uninteressant, da man nicht damit zu rechnen hat, daß physikalische Tatsachen durch Funktionen beschrieben werden müssen, die überall C^k , aber nirgends C^{k+1} sind.

178. ANMERKUNG: Die Symmetriegruppe der schwachen Isotropie wirkt transitiv auf der Menge der projektiven Basen von $D_p M$. Eine weitere Abschwächung des Isotropiebegriffes kann man erhalten, indem man eine Gruppe verlangt, die nur einfach transitiv auf der Menge der Richtungen wirkt. Diese Art von Isotropie scheint jedoch nicht auszureichen, um geodätische Pfadstrukturen in obiger Weise zu charakterisieren.

VI. PFADSTRUKTUREN UND GRAVITATIONSTHEORIE

179. Bei einem konstruktiven Aufbau der Einsteinschen Theorie kann man von einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M (Raumzeit) mit einer Trägheitsstruktur ausgehen. Diese ist gegeben durch die Gesamtheit der möglichen Bahnen von frei fallenden Probekörpern. Man fordert von den Bahnen (Weltlinien), daß sie durch Vorgabe eines Bahnpunktes und der Richtung in diesem Punkt eindeutig bestimmt sind: Die Trägheitsstruktur soll eine eingeschränkte Pfadstruktur sein. Man kann diese Forderung als Ausdruck des schwachen Äquivalenzprinzips auffassen.

180. Um von diesen Pfadstrukturen zu der in der Relativitätstheorie benutzten Geodätenstruktur zu gelangen, kann man fordern, daß es zu jedem Punkt p ein Koordinatensystem gibt, in dem die Bewegungsgleichungen bei geeigneter Parameterisierung durch

$$\ddot{x}^a = 0 \quad \text{in } p$$

gegeben sind (Infinitesimale Geltung des Trägheitsgesetzes). Dies erscheint jedoch unbefriedigend, da die bevorzugten Koordinaten zugleich mit der Pfadstruktur eingeführt werden und nicht klar ist, was der koordinatenunabhängige Inhalt dieser Forderung ist. Wünschenswert ist eine, wenn möglich koordinatenfreie, geometrische Kennzeichnung. Eine solche zu finden, war das Hauptziel dieser Arbeit. Die geometrisch anschaulichste Charakterisierung, die gefunden wurde, ist die durch Symmetrien (Kapitel V). Danach sind unter den allgemeinen Pfadstrukturen die geodätischen durch punktale Isotropie

ausgezeichnet. Aber auch das Polynomkriterium (77) ist unabhängig von der Koordinatenwahl in M . Es liefert zwar keine "geometrische" Kennzeichnung, wohl aber eine allgemein-kovariante Charakterisierung durch analytische Einfachheit.

181. Ist auf der Raumzeit außer der geodätischen Pfadstruktur auch eine Konformstruktur gegeben (motiviert durch Lichtausbreitung oder Kausalität), die gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllt (Weyl-Geometrie), so kann man rein geometrisch-kinematische Begriffe wie Uhren, Fermiverschiebung, etc. konstruieren [21, 22]. Hier wollen wir uns mit der Konstruktion von Uhren näher befassen. Die geometrische Konstruktion ist in [21], Fig. 10-14, dargestellt; genauere Ausführungen findet man in [22]. Wir wollen nun analytisch beweisen (einschließlich des in [21] nur angedeuteten Grenzüberganges), daß die so erhaltene Parameterisierung von zeitartigen Geodäten wirklich affin bezüglich des Weyl-Zusammenhanges ist.

182. Betrachten wir also eine zeitartige Geodäte $\tau = (\tau^a)$ der projektiven Struktur. Aufgrund der Verträglichkeitsbedingungen zwischen der projektiven und der konformen Struktur gibt es genau einen symmetrischen Zusammenhang Γ aus der projektiven Klasse, dessen Parallelverschiebung Nullvektoren in Nullvektoren überführt (Weyl-Zusammenhang) [23]. τ sei durch t affin (bzgl. Γ) parameterisiert. OE. seien die Koordinaten so gewählt, daß $\tau^a(t) = \delta_1^a t$ ist.

183. Im Punkt $O = (0,0,0,0) = \tau(0)$ geben wir einen Vektor $X = (X^a)$ vor. Mit Hilfe der (projektiven) Zick-Zack-Konstruktion [22] kann man einen Streifen S (2-Fläche) erzeugen, sodaß X tangential an S ist. Von X verlangen wir außerdem, daß es orthogonal zu τ ist. Für eine geeignete Metrik g_{ab} der Konformstruktur g gilt dann

$$g_{ab} X^a \dot{\tau}^b(0) = 0, \quad g_{ab} \dot{\tau}^a \dot{\tau}^b = -1.$$

Man kann X längs τ verschieben, indem man fordert: $X(0) = X$, $X(t)$ Vektor in $\tau(t)$ mit

$$|X(t)| := g_{ab}(\tau(t)) X^a(t) X^b(t) = g_{ab}(0) X^a(0) X^b(0) = |X(0)|$$

$$g_{ab}(\tau(t)) X^a(t) \dot{\tau}^b(t) = 0$$

und $X(t)$ tangential an S .

184. Wir ergänzen $X(0)$ und $\dot{\tau}(0)$ durch zwei weitere Vektoren Y und Z zu einer orthogonalen Basis von $T_0 M$. Y und Z verschieben wir ebenso wie X längs τ . Schließlich gelte für jedes t

$$|X(t)| = |Y(t)| = |Z(t)| = |\dot{\tau}(t)|.$$

X, Y, Z sind notwendig immer raumartig.

185. Die in 183 konstruierte Parallelverschiebung stimmt mit der Parallelverschiebung von Γ überein: In [22] wird gezeigt, daß die Konstruktion von S der Γ -Parallelverschiebung einer 2-Richtung (erzeugt von $\dot{\tau}(0)$ und $X(0)$ in 183) entspricht.

Wegen der Verträglichkeitseigenschaften des Weyl-Zusammenhanges bleibt auch die Orthogonalität von $\dot{\tau}(t)$ und $X(t)$ erhalten. Man kann also bzgl. Γ längs τ Fermi-Koordinaten einführen, sodaß

$$X^a(t) = \delta^a_2$$

$$Y^a(t) = \delta^a_3$$

$$Z^a(t) = \delta^a_4.$$

Dann gilt $\Gamma^a_{bc}(\tau(t)) = 0$ für alle t und $g_{ab} = \gamma(t)\eta_{ab}$ längs τ mit einer noch freien Funktion $\gamma(t)$ (η_{ab} ist die Minkowski-Metrik der Signatur $-+++$).

186. Für die Tensordichte $q_{ab} \in g$ mit $\det(q_{ab}) = -1$ (in jedem Koordinatensystem) und

$$K^a_{bc} = \frac{1}{2} q^{ad} (q_{db,c} + q_{dc,b} - q_{bc,d})$$

gilt

$$r^a_{bc} = K^a_{bc} + q^{ad} q_{bc} v_d - 2\delta^a_b v_c$$

mit festem (durch die Weyl-Struktur bestimmten) v_a .

187. Für eine Metrik $g_{ab} \in g$ mit $g_{ab} = 2^2 q_{ab}$ hat man

$$r^a_{bc} = K^a_{bc} + g^{ad} g_{bc} (v_d + \frac{2g_{,d}}{2}) - 2\delta^a_b (v_c + \frac{2g_{,c}}{2})$$

mit

$$K^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}).$$

v_a ist im allgemeinen kein Gradient, sodaß nicht durch entsprechende Wahl von Ω

$$K_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a$$

in ganz M erreicht werden kann. Immerhin dürfen wir oE. fordern, daß

$$K_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a = 0 \quad \text{längs } \tau$$

(und damit $K_{bc,1\dots 1}^a = \Gamma_{bc,1\dots 1}^a = 0$ auf τ) ist.

188. Auf τ gilt $g_{ab} = \gamma(t)\eta_{ab}$ und $K_{bc}^a = 0$, also insbesondere zB.

$$0 = K_{11}^1 = \frac{1}{2} \gamma^{-1} g_{11,1} = \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_{,1},$$

also $\gamma = \text{const}$ auf τ . OE. können wir setzen

$$g_{ab} = \eta_{ab} \quad \text{auf } \tau.$$

Damit ist die Bogenlänge bzgl. g_{ab} der affine Parameter t von τ (Eigenzeit).

189. Wir haben mit den hier angegebenen Vorschriften eine für die Rechnung möglichst günstige Wahl der Koordinaten und des Konformfaktors erreicht. Nun vollziehen wir die geometrische Konstruktion nach.

(1) Der Streifen S definiert durch τ und X

Dieser Streifen ist eine 2-Fläche, die τ enthält und tangential an die "Ebene" $x^3 = x^4 = 0$ liegt. Wir parameterisieren S durch $x^1 = t$, $x^2 = \varepsilon$; dann ist nach den Ausführungen in [22] klar, daß der Streifen für kleine ε die Bedingung erfüllt:

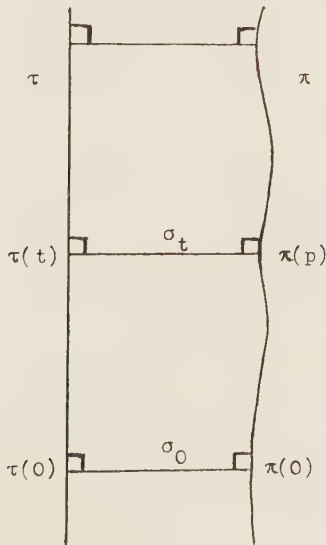
$$S = \{(t, \varepsilon, x^3(t, \varepsilon), x^4(t, \varepsilon)) \mid x^3 = O(\varepsilon^3), x^4 = O(\varepsilon^3)\}.$$

Alle Konstruktionen werden "in der Nähe" der Geodäte τ ausgeführt, dh. für $\varepsilon \ll 1$. Wir rechnen jeweils inklusive der quadratischen Terme in ε und vernachlässigen $O(\varepsilon^3)$. In dieser Näherung ist S eben (in unseren Koordinaten).

(2) Der "geodätische Kamm" an τ und die "Parallele" zu τ

190. Wir konstruieren eine Parallele π zu τ , die in S liegt. Das ist eine Kurve, deren Punkte mit Punkten auf τ durch Geodäten σ verbunden werden können, sodaß σ orthogonal zu τ und π ist.

Abb. 4



π liegt in S , ist also von der Gestalt

$$\pi(p) = (p, P(p), 0, 0) \quad (*)$$

mit noch zu bestimmender Funktion P .

191. Eine zu τ senkrechte Geodäte σ_t in S (ein Zahn des Kammes) mit $\sigma_t(0) = \tau(t)$ ist notwendig von der Form

$$\sigma_t(s) = (t, s, 0, 0) \quad .$$

Im Abstand s_0 soll σ_t π unter rechtem Winkel schneiden, also im Punkt $\sigma_t(s_0) = (t, s_0, 0, 0) = (t, P(t), 0, 0) = \pi(t)$. Dort muß gelten

$$\begin{aligned} 0 &= g_{ab}(t) \dot{\pi}^a(t) \dot{\sigma}_t^b(s_0) = g_{ab}(t) (\delta_1^a + \delta_2^a \dot{P}(t)) \delta_2^b = \\ &= g_{12}(t) + \dot{P}(t) g_{22}(t) \quad , \end{aligned} \quad (*)$$

wobei $g_{ab}(t)$ für $g_{ab}(t, P(t), 0, 0)$ steht.

192. Beginnen wir die Konstruktion von π im Punkt $\pi(0) = (0, \varepsilon, 0, 0)$. Also entwickeln wir $\pi(t)$ nach t um $\pi(0)$:

$$\begin{aligned} \pi^1(t) &= t \quad , \quad \pi^3(t) = \pi^4(t) = 0 \quad , \\ \pi^2(t) &= P(t) = \varepsilon + t \dot{P}(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{P}(0) + \dots \end{aligned}$$

mit der Normierung $P(0) = \varepsilon$. Aus (*) folgt

$$\dot{P}(t) = - \frac{g_{12}(t)}{g_{22}(t)} \quad ,$$

also

$$\ddot{P}(t) = - (g_{22}(t))^{-2} (\dot{g}_{12}(t) g_{22}(t) - \dot{g}_{22}(t) g_{12}(t)) \quad ,$$

$\ddot{P}(t)$, $\ddot{P}'(t)$ etc. analog ,

mit

$$\begin{aligned}\dot{g}_{1,2}(t) &= \frac{d}{dt} g_{1,2}(t, P(t), 0, 0) = g_{1,2,1}(t) + g_{1,2,2}(t) \dot{P}(t) = \\ &= g_{1,2,1}(t) - g_{1,2,2}(t) \frac{g_{1,2}(t)}{g_{2,2}(t)},\end{aligned}$$

usw.

193. Man kann daher $P^{(n)}(t)$ durch rationale Ausdrücke in $g_{ab,c\dots d}(t, P(t), 0, 0)$ (mit $a, b, c, d, \dots = 1, 2$) ausdrücken und $P^{(n)}(0)$ in der Taylorreihe von $\pi^2(t)$ durch rationale Ausdrücke in $g_{ab,c\dots d}(0, \varepsilon, 0, 0)$. Man überzeugt sich leicht, daß diese Ausdrücke in jedem Summanden mindestens einen Faktor der Gestalt

$$g_{1,2,1\dots 1}(0, \varepsilon, 0, 0) = \frac{\partial^k}{\partial (x^1)^k} g_{1,2} \Big|_{(0, \varepsilon, 0, 0)}, \quad k \geq 0$$

enthalten.

194. Wir entwickeln $g_{1,2,1\dots 1}(0, \varepsilon, 0, 0)$ um 0 und erhalten

$$g_{1,2,1\dots 1}(0, \varepsilon, 0, 0) = g_{1,2,1\dots 11}(0, 0, 0, 0) + \varepsilon g_{1,2,1\dots 12}(0, 0, 0, 0) + O(\varepsilon^2).$$

Es ist aber $g_{1,2} = 0$ längs τ , somit

$$g_{1,2,1\dots 1}(0, 0, 0, 0) = 0.$$

Weiterhin folgt aus $K_{2,2,1\dots 1}^1 = 0$ längs τ , daß

$$g_{1,2,1\dots 12}(0, 0, 0, 0) = 0,$$

unter Verwendung der Definition von K_{bc}^a (187). Folglich ist

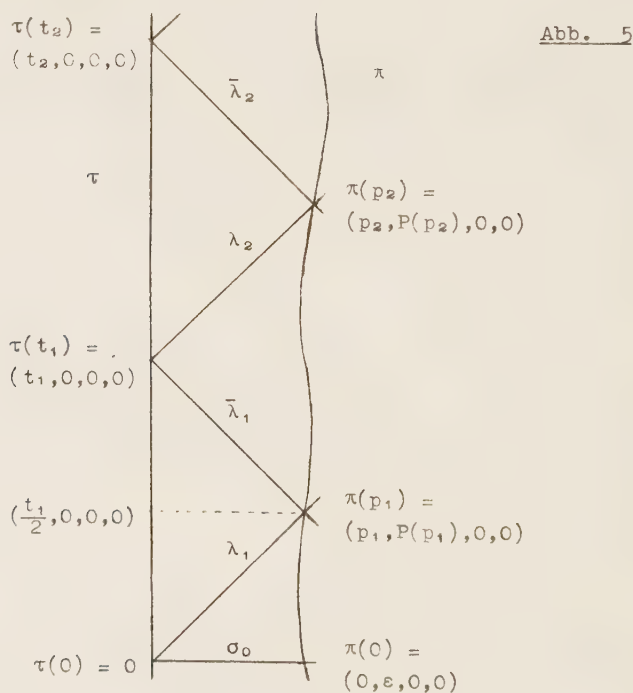
$$P^{(n)}(0) = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } n \geq 1 \text{ und}$$

$$\pi^2(t) = P(t) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) =: \varepsilon + \varepsilon^2 \varphi(t, \varepsilon)$$

mit $\varphi(t, \varepsilon) = O(1)$ bzgl. ε . Also

$$\pi(t) = (t, \varepsilon + \varepsilon^2 \varphi(t, \varepsilon), C, O)$$

(3) Die Licht-Uhr



195. Wir wollen nun einen Lichtstrahl (Nullgeodäte) zwischen den Kurven τ und π hin- und herschicken. Für die Bezeichnungen verweisen wir auf Abb. 5. Geodäten, die von τ tangential an S ausgehen, haben die Form

$$\gamma(s) = (a + \alpha s, \beta s, 0, 0) + O(\varepsilon^3)$$

(wenn $\beta s < \varepsilon = \text{Streifenbreite}$), wegen der Eigenschaften von S und der Fermikoordinaten längs τ . Also gilt für Nullgeodäten, die von τ tangential an S ausgehen

$$\lambda(1) = (a+1, 1, 0, 0) \quad (+ O(\varepsilon^3))$$

oder

$$\bar{\lambda}(1) = (a-1, 1, 0, 0) \quad (+ O(\varepsilon^3)) \quad .$$

196. Wir können also τ , λ , $\bar{\lambda}$, in unserer Näherung als euklidische Geraden in der Ebene behandeln, die unter 45° bzw. 90° zueinander verlaufen. Dann erhält man direkt aus der Zeichnung

$$\begin{aligned} t_1 &= 2p_1 \\ t_i - t_{i-1} &= 2(p_i - t_{i-1}) \quad . \end{aligned}$$

Um mit den Parameterwerten t_i eine Uhr zu definieren, die die Eigenzeit (den affinen Parameter von τ) anzeigt, müssen alle Intervalle (Zeiteinheiten, "ticks") $t_i - t_{i-1}$ im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ gleich groß sein.

197. Wir betrachten eine Nullfolge für $\varepsilon : \{\varepsilon_k\} = \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2^k}, k \in \mathbb{N} \right\}$ und konstruieren zu jedem ε_k eine Uhr.

BEHAUPTUNG: Für $k \rightarrow \infty$ sind die Grenzwerte der Zeitintervalle

$t_{i+2^k} - t_i$ und $t_{j+2^k} - t_j$ für alle (i, j) endlich und gleich lang.

BEWEIS: Es ist

$$t_{i+2^k} - t_i = \sum_{v=1}^{2^k} (t_{i+v} - t_{i+v-1}) = 2 \sum_{v=1}^{2^k} (p_{i+v} - t_{i+v-1}) .$$

(Die Punkte $\pi(p_i)$ liegen auf λ_i , somit kann man aus 195 (siehe Zeichnung) entnehmen, daß

$$\pi^2(p_i) = \pi^1(p_i) - t_{i-1} ,$$

also wegen (X) (190) $p_i - t_{i-1} = P(p_i)$.

198. Somit ist

$$t_{i+2^k} - t_i = 2 \sum_{v=1}^{2^k} P(p_{i+v}) .$$

Nach 194 gilt für die zu ε_k gehörige Lichtuhr

$$P(t) = \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 \varphi(t, \varepsilon_k) .$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} t_{i+2^k} - t_i &= 2 \sum_{v=1}^{2^k} (\varepsilon_k + \varepsilon_k^2 \varphi(p_{i+v}, \varepsilon_k)) = \\ &= 2 \sum \left(\frac{\varepsilon_0}{2^k} + \left(\frac{\varepsilon_0}{2^k} \right)^2 \varphi \right) = \\ &= 2\varepsilon_0 + \frac{2\varepsilon_0^2}{2^k} \sum \varphi(p_{i+v}, \varepsilon_k) , \end{aligned}$$

und es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (t_{i+2^k} - t_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} (t_{j+2^k} - t_j) = 2\varepsilon_0 .$$

Man erhält also eine Zeiteinheit $2\varepsilon_0$, die längs der Geodäten τ konstant bleibt, somit mit der Eigenzeit verträglich ist.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wurden zunächst Pfade und Richtungen als Äquivalenzklassen von Kurven bzw. Vektoren definiert und Richtungsbündel sowie Lifts von Kurven und Pfaden in verschiedene Bündel erklärt. Mit diesen Grundbegriffen kann man Pfadstrukturen definieren. Diese können durch spezielle Richtungsfelder dargestellt werden.

Die Geodäten eines linearen Zusammenhanges definieren eine (geodätische) Pfadstruktur. Wenn man Richtungsfelder in inhomogenen Koordinaten beschreibt, zeichnen sich die zu geodätischen Pfadstrukturen gehörenden Richtungsfelder durch besonders einfache algebraische Form aus.

Wählt man für jeden Pfad einer Pfadstruktur eine repräsentierende Kurve, so kann dieses Kurvensystem durch ein Spray beschrieben werden. Geodätische Sprays kann man durch Differenzierbarkeitseigenschaften charakterisieren. Eine andere Darstellung geodätischer Kurvensysteme erhält man durch Zusammenhänge im Bündel der linearen Basen. Verallgemeinert man diese Zusammenhänge zu nichtlinearen Übertragungen, so ergibt sich eine analoge Beschreibung der nichtgeodätischen Kurvensysteme. Weiter wurden lineare Zusammenhänge im Bündel der projektiven Basen untersucht, die ebenfalls auf geodätische Pfadstrukturen führen.

Es folgen einige explizite Beispiele für nichtgeodätische Pfadstrukturen. Physikalisch wichtig sind die Bahnen geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld. Diese führen zum Begriff der

eingeschränkten Pfadstrukturen: Hier sind Pfade nur für einen Teil der Richtungen in jedem Punkt gegeben, nämlich für zeitartige Richtungen bzgl. einer Lorentzmetrik. Will man solche Pfadstrukturen auf Nullrichtungen fortsetzen, so kann man mit Fortsetzbarkeitsbedingungen physikalisch interessante Fälle aussondern.

Schließlich werden Symmetrien von Pfadstrukturen und der Begriff der lokalen Isotropie eingeführt. Es stellt sich heraus, daß sich geodätische Pfadstrukturen unter den allgemeinen durch besonders hohe Symmetrie auszeichnen. Dies macht ihre Verwendung in der allgemeinen Relativitätstheorie zur Beschreibung der Trägheitsbahnen mathematisch tiefer verständlich.

Bei einer Axiomatik der allgemeinen Relativitätstheorie kann man von einer geodätischen Pfadstruktur und einer damit verträglichen Konformstruktur ausgehen. Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich, Uhrenmodelle zu konstruieren und Parallelverschiebungen konstruktiv durch Gedankenexperimente zu definieren. Im letzten Kapitel wurden diese Konstruktionen näher untersucht.

LITERATUR

- 1 S. Lang: Introduction to Differentiable Manifolds (Interscience: New York 1966)
- 2 R.L. Bishop, S.I. Goldberg: Tensor Analysis on Manifolds (Macmillan: New York 1968)
- 3 S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol. I (Interscience: New York 1963)
- 4 R.P. Geroch: J. Math. Phys. 8, 782 (1967)
- 5 R.P. Geroch: Spacetime Structure from a Global Viewpoint, in R.K. Sachs (ed.), General Relativity and Cosmology, p. 71 (Academic Press: New York 1971)
- 6 D. Laugwitz: Differentialgeometrie (Teubner: Stuttgart 1960)
- 7 L.P. Eisenhart, O. Veblen: Proc. Nat. Acad. 8, 19 (1922)
- 8 T.Y. Thomas: The Differential Invariants of Generalized Spaces (Cambridge University Press 1934), und Literaturangaben dort.
- 9 W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone: Connections, Curvature and Cohomology, Vol. I (Academic Press: New York 1973)
- 10 H. Behnke, P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (Springer: Berlin 1970)
- 11 H. Grauert, K. Fritzsche: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher (Springer: Berlin 1974)
- 12 H. Rund: The Differential Geometry of Finsler Spaces (Springer: Berlin 1959)
- 13 B. Schmidt: Differential Geometry from a Modern Standpoint, in W. Israel (ed.), Relativity, Astrophysics and Cosmology, p. 289 (D. Reidel: Dordrecht 1973).
- 14 R.S. Millman, A.K. Stehney: Am. Math. Monthly 80, 475 (1973)

- 15 K. Yano, S. Ishihara: *Tangent and Cotangent Bundles* (Dekker: New York 1973)
- 16 H. Friezecke: *Math. Annalen* 94, 101 (1925)
- 17 R.P. Geroch: unveröff. Manuskript
- 18 P.M. Cohn: *Lie Groups* (Cambridge Univ. Press 1965)
- 19 L.S. Pontrjagin: *Topologische Gruppen, Teil 2* (Teubner: Leipzig 1958)
- 20 H.W. Guggenheimer: *Differential Geometry* (McGraw-Hill: New York 1963)
- 21 J. Ehlers: *Survey of General Relativity Theory*, in W. Israel (ed.), *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, p. 1 (D. Reidel: Dordrecht 1973)
- 22 J. Ehlers, A. Schild: *Commun. math. Phys.* 32, 119 (1973)
- 23 J. Ehlers, F.A.E. Pirani, A. Schild: *The Geometry of Free Fall and Light Propagation*, in L.O'Raiheartaigh (ed.), *General Relativity, papers in honour of J.L. Synge*, p. 6 (Clarendon Press: Oxford 1972)
- 24 S.W. Hawking, G.F.R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge Univ. Press 1973)

LEBENS LAUF

Name: Egon Karl Köhler

Geburtsdatum: 12. Juli 1947

Geburtsort: München

Eltern: Emil Köhler
Maria Köhler, geb. Baumgartner

Schulen: 1953-56 Volksschule in München
1956/57 Volksschule in Westheim b. Augsburg
1957-66 Realgymnasium Augsburg
Reifezeugnis vom 19. 7. 66

Studium: WS 1966/67 bis WS 1971/72 Studium der Mathematik
und Astronomie an der Universität München.
Diplomhauptprüfung in Mathematik am 25. Mai 1972.
Diplomarbeit über "Gravitationsfelder axialsym-
metrischer Masseverteilungen".

Tätigkeit: Januar 1973 bis heute Stipendiat am Max-Planck-
Institut für Physik und Astrophysik München.
Hier entstand die vorliegende Arbeit.

Dissertationsdruck
GmbH & Co. KG.

86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Tel. 0951/21617[5 4414]

M. SCHADEL